

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Московский государственный институт электроники и математики

Факультет прикладной математики

М. С. АГРАНОВИЧ, Б. А. АМОСОВ и Л. Е. ФИЛИППОВА

Введение в математический анализ

Лекции и практические занятия
по математическому анализу

I семестр, часть I

Москва 1998

Предисловие

1

1. Что такое математический анализ. Элементы математического анализа изучаются в курсе школьной математики, и мы сейчас вспомним примеры некоторых понятий, которые можно отнести к математическому анализу. В институтах технического или естественно-научного профиля, в частности в МГИЭМ, это общий курс, который облегчено читается три семестра. Математический анализ можно определить, хотя и не слишком точно, как теорию функций числовых переменных с числовыми значениями. Вот из каких частей состоит этот курс.

I СЕМЕСТР

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. Понятия предела и непрерывности для функций $y = f(x)$ с «одномерными» x и y . Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций.

Простейшие элементарные функции изучаются в средней школе. Примеры: $y = ax + b$ (где a и b — постоянные; это *линейная функция*), $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ и т.д.

Во Введении в анализ изучаются значительно более общие функции вида $y = f(x)$. Для них даются строгие определения предела и непрерывности и доказывается ряд теорем на основании этих определений. Соответствующий «язык $\varepsilon-\delta$ » не всегда сразу понятен, но студенту предстоит научиться на нем «разговаривать», без чего невозможно освоение дальнейшего материала.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. Дифференцирование функции $y = f(x)$, т.е. вычисление ее производной $f'(x)$, — одна из основных операций в математическом анализе. Некоторые приложения дифференциального исчисления (в частности, к построению графиков функций, к вычислению пределов) изучаются уже в этом разделе.

II СЕМЕСТР

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. Здесь систематически изучаются операция нахождения неопределенного интеграла (обратная дифференцированию) и операции вычисления определенного интеграла (позволяющая, в частности, вычислять длины кривых, площади фигур, объемы тел, массы тел), а также связь между ними.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. Простейшие примеры функций двух переменных: $z = x^2y^3$, $z = \sin x + \cos y$.
3. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. Числовой ряд — это бесконечная сумма достаточно быстро уменьшающихся слагаемых. (Не нужно думать, что мы даем здесь строгое определение.) Например, сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

равна 2. В этом разделе изучаются значительно более общие бесконечные суммы.

III СЕМЕСТР

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. Речь идет о рядах из функций, в частности, о степенных рядах

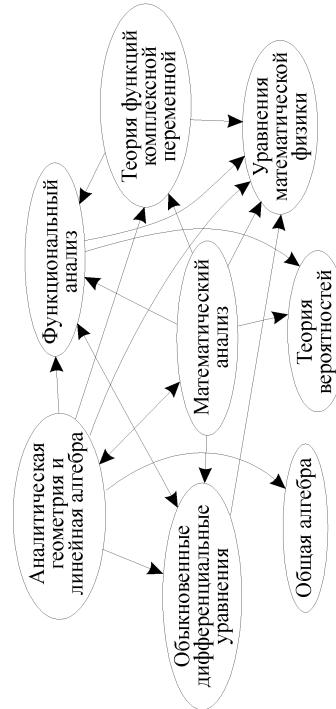
$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

(a_n — постоянные, x — переменная) и тригонометрических рядах

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. Здесь изучаются интегралы по двумерным и трехмерным областям, кривым и поверхностям.

Вместе с курсом аналитической геометрии и линейной алгебры математический анализ составляет базу для изучения других математических дисциплин, образующих цикл «классической математики». Вот схема зависимости этих дисциплин:



Наряду с циклом классической математики студентам факультета прикладной математики читаются циклы дискретной и вычислительной математики. Вместе с циклом классической математики они закладывают основы образования будущих специалистов в области прикладной математики.

2. Как изучается математический анализ. Изучение этого курса складывается из проработки материала лекций и практических (семинарских) занятий.

При проработке лекций надо прежде всего понять и научиться правильно формулировать основные определения и теоремы. Их бесполезно запоминать без полного понимания и контроля за смыслом и положением каждого слова. Любая «незаметная» перестановка слов или потеря правильного синтаксиса фразы обычно приводит к бессмыслице. Простейший пример: два утверждения «для любого числа x существует число y , такое, что $y > x$ » и «существует число y , такое, что $y > x$ для любого числа x » могут показаться почти идентичными. На самом деле в первом утверждается, что не существует «самого большого числа», а во втором — что такое число существует (последнее — образец бессмыслицы).

Следует очень внимательно относиться к примерам в лекциях и научиться объяснять эти примеры. Они нужны, чтобы лучше понять определения и формулировки теорем.

Затем нужно разобрать и научиться воспроизводить без ошибок доказательства теорем, лемм и предложений, не заглядывая в книгу или тетрадь.

Все вопросы, на которые должен научиться отвечать студент, сведены в вопросы. Их можно использовать при подготовке к экзаменам, которые проводятся в конце каждого семестра. Экзаменационный билет в конце семестра обычно содержит два вопроса из вопросника, включаяющие доказательства теорем из разных разделов, изучаемых в этом семестре, и несложную задачу. При ответе на билет студент также формулирует определения понятий, используемых в ответе. Полимимо билета, экзаменатор обычно предлагает несколько простых дополнительных вопросов в пределах вопросника.

В каждом семестре студенты МГИЭМ сдают один–два коллоквиума по теоретическому материалу. На этих коллоквиумах также используются вопросы. Цель коллоквиума состоит в проверке качества усвоения теоретического материала. Для студента,

занимающегося самостоятельно, серьезная опасность, в особенности в первом семестре, состоит в том, что он может не понять, что, собственно, от него ожидается. Такой студент может оказаться не готовым к грамотному ответу на вопросы вопросника. В этой книге мы постарались сделать максимум возможного для читателя, чтобы он смог избежать этой опасности.

Параллельно с лекциями надо осваивать материал практических занятий, изложенный во второй части книги.

Часть этого материала должна помочь освоению теоретического материала из лекций. В частности, разбирается значительное число «теоретических» задач («упражнений»), которые ставятся на лекциях. Эти задачи надо стараться решать самостоятельно, затем сравнивать решения с предлагаемыми во второй части книги. В основном же практические занятия предназначены для развития у студентов активных навыков применения методов и средств математического анализа к решению конкретных задач. Многие результаты, которые получаются на практических занятиях, существенным образом дополняют лекционный материал и требуют запоминания. Они записываются в рамке. Главная же задача для читателя этой книги — не только запомнить, но и научиться выводить эти результаты самостоятельно, т. е. овладеть соответствующими методами.

Мы приводим также образцы контрольных работ, в которых за ограниченное время, обычно за два академических часа, студент должен решить предлагаемые задачи, не пользуясь книгой или тетрадью. Студент, успешно справившийся с контрольными работами и коллоквиумами, получает зачет и допускается к экзамену.

Следует добавить, что справиться с программой семестра за несколько дней невозможно, как невозможно за несколько дней освоить иностранный язык. Требуется систематическая работа в течение семестра, чтобы постепенно привыкнуть к материалу и овладеть им.

Кроме нашей книги, имеется много, и притом превосходных, учебников (и задачников) по математическому анализу. Но пользоваться ими параллельно с нашей книгой непросто, так как в деталях и последовательности изложения возможны существенные расхождения.

Особенности нашей книги состоят в том, что она: 1) адекватна курсу, изучаемому в МГИЭМ на Факультете прикладной математики, и практически не содержит никаких дополнений к этому

курсу; 2) написана для студентов, которые осваивают курс самостоятельно.

Иногда мы опускаем доказательства для экономии места и времени и заменяем их объяснением идей; но это специально оговаривается. В основном же наше изложение является строгим, и мы настаиваем на этой строгости, приучаящей студентов логически правильно излагать свои мысли.

В начале каждой лекции на полях в рамке указывается ее номер.

Курс математического анализа в МГИЭМ сложился за много лет. В 1962 г., когда был образован наш институт, его первый варант читал профессор Б. А. Фукс. Он работал в институте заведующим кафедрой около 10 лет. В дальнейшем этот курс на Факультете прикладной математики читали другие профессора, в том числе М. С. Агронович, Р. С. Исламгилов, Ю. А. Неретин, А. М. Олевский, Ю. Б. Орочки, М. Г. Шур и докторы И. С. Аршон, Т. Х. Еникеева, О. А. Эльза, И. В. Каменев. Доктор Б. А. Амосов читал этот курс на Факультете математической экономики. Доцент Л. Е. Филиппова в течение многих лет проводила семинарские занятия на Факультете прикладной математики. Многократно курс несколько менялся, и в итоге он является результатом коллективной работы.

Настоящая книга охватывает материал первой половины первого семестра.

§1. Действительные числа.

Последовательности и их пределы

1.1. Действительные числа. Действительные, или вещественные, числа мы определим как бесконечные десятичные дроби. Такая дробь записывается в виде $a = a_0.a_1a_2\dots a_n\dots$ или $a = -a_0.a_1a_2\dots a_n\dots$, где a_0 — целое неотрицательное число, a_1 — первый десятичный знак, a_2 — второй и т.д.; знак + или – означает, что число a положительно или соответственно отрицательно. Если a положительно, то a_0 называется его целой частью; если a отрицательно, то a_0 — целая часть его модуля $|a|$. Знак не прописывается только числу $0 = 0,00\dots 0\dots$. Напомним, что *дескриптивно-rationальные числа* и только они допускают двоякую запись в виде бесконечных десятичных дробей — с 0 в периоде

и 9 в периоде. Например, $0,10\dots 0\dots = 0,09\dots 9\dots$. *Рациональные* числа, т. е. отношения целых чисел, в отличие от *иррациональных*, записываются в виде периодических бесконечных десятичных дробей (например, $28/99 = 0,2828\dots$). Множество рациональных чисел обозначается через \mathbb{Q} . Множество всех действительных чисел обозначается через \mathbb{R} . Оно известным образом отождествляется с множеством всех точек прямой линии. Для этого на прямой фиксируются две точки, отвечающие числам 0 и 1:



После этого каждой точке на прямой сопоставляется действительное число — координата этой точки, и каждое действительное число оказывается координатой некоторой точки.¹⁾
Действительные числа образуют упорядоченное множество: любые два действительных числа a и b либо равны, либо связаны одним из двух неравенств $a < b$ и $b < a$. Любое отрицательное число меньше нуля, нуль меньше любого положительного числа.

Если

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots \quad \text{и} \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2\dots$$

— два различных *положительных* числа, то, чтобы выяснить, какое из них больше другого, мы сравниваем сначала их целые части α_0 и β_0 . Если $\alpha_0 < \beta_0$, то $a < b$. Если $\alpha_0 = \beta_0$, то мы сравниваем первые знаки после запятой: α_1 и β_1 . Если $\alpha_1 < \beta_1$, то $a < b$. Если $\alpha_1 = \beta_1$, то мы сравниваем вторые знаки после запятой, и т. д. На некотором шаге этот процесс заканчивается, так как иначе числа оказались бы равными вопреки предположению.

Упорядоченность действительных чисел позволяет определить следующие полезные множества на числовой прямой:

интервал	$(a, b) = \{x : a < x < b\}$	
отрезок	$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$	
и полуинтервалы	$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$	
	$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$	

Любой интервал (a, b) , содержащий точку x_0 (т. е. такой, что $a < x_0 < b$), будем называть *окрестностью* этой точки и обозначать через $O(x_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *На любом интервале (a, b) есть хотя бы одна рациональная и хотя бы одна иррациональная точка.*

Иными словами, никакой интервал (a, b) не может состоять только из рациональных или только из иррациональных точек.

УПРАЖНЕНИЕ. Выведите это утверждение из правила сравнения действительных чисел.

1.2. Определение функции. Определение и запись последовательности. Пусть заданы некоторые действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда скажем, что задана (*числовая*) *последовательность*. Ее краткая запись: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, или просто $\{a_n\}$.

Числовую последовательность можно рассматривать как функцию, заданную на множестве

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\} \quad (1)$$

натуральных чисел.

Общее определение *функции* состоит в следующем. Пусть X и Y — произвольные множества. Множество F , состоящее из пар (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$, называется *графиком функции f из X в Y*, если в этом множестве нет двух пар (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , таких, что $x_1 = x_2$, но $y_1 \neq y_2$. Множество $X_0 \subset X$ тех элементов x , для которых существует пара $(x, y) \in F$, называется *областью определения* функции f , а (единственный) элемент $y \in Y$, такой, что $(x, y) \in F$, обозначается $f(x)$ и называется *значением функции f в точке x*. Множество $Y_0 \subset Y$, состоящее из таких y , для которых существует пара $(x, y) \in F$, называется *областью значений функции f*.

Таким образом, числовая функция f — это правило, согласно которому *каждому* числу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное число y . В этом случае говорят, что задана функция $y = f(x)$ с *областью определения X*, и пишут $y = f(x)$, $x \in X$.

¹⁾ Прямая — не определяемое понятие, и налигие точки с любой заданной координатой — поступающее (принимаемое без доказательства) свойство прямой.

¹⁾ Прямая — не определяемое понятие, и налигие точки с любой заданной координатой — поступающее (принимаемое без доказательства) свойство прямой.

¹⁾ Напомним, что запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A , или, короче, a лежит в A . Запись $a \notin A$ означает, что a не лежит в A . Не следует путать знак принадлежности \in со знаком включения \subset ; запись $A \subset B$ означает, что множество A является подмножеством множества B .

Последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ можно рассматривать как функцию с областью определения $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ и областью значений в \mathbb{R} . Число a_n (точнее, пара (n, a_n)) называется *n-м членом* последовательности $\{a_n\}_1^\infty$. *Последовательность всегда, состоит из бесконечного набора чисел; но множество различных значений a_n* (т.е. область значений соответствующей функции) может оказаться конечным. Например, все члены последовательности $\{(-1)^n\}_1^\infty$ с четными номерами n равны 1, а с нечетными -1 .

Иногда вместо \mathbb{N} используют множество

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2)$$

целых неотрицательных чисел и рассматривают последовательность $\{a_n\}_0^\infty$. Вместо \mathbb{N} и \mathbb{Z}_+ годится также любое множество чисел вида $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$. Если уже отговорено, с какого n начинается нумерация, то можно писать $\{a_n\}$.

1.3. Ограниченные и неограниченные множества, функции, последовательности. Пусть M — числовое множество. Оно называется *ограниченным*, если существует такое число C , что $|x| \leq C$ для всех $x \in M$; *ограниченным сверху*, если существует такое C_1 , что $x \leq C_1$ для всех $x \in M$; *ограниченным снизу*, если существует такое C_2 , что $x \geq C_2$ для всех $x \in M$. Если числа C с указанным выше свойством не существует, то множество M называется *неограниченным*. Аналогично, если не существует C_1 (или C_2) с только что указанным свойством, то множество M называется *не ограниченным сверху* (соответственно *снизу*).

Легко проверить, что ограниченность множества равносильна его ограниченности снизу и сверху. Действительно, если $|x| \leq C$, то $-C \leq x \leq C$; с другой стороны, если $x \leq C_1$ и $x \geq C_2$, то $|x| \leq C = \max\{|C_1|, |C_2|\}$ (проверьте это неравенство).

Функция называется *ограниченной* (*сверху, снизу*), если область ее значений является ограниченным множеством (сверху, снизу). В противном случае она называется *неограниченной* функцией (соответственно *не ограниченной сверху, снизу*).

В частности, последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если множество чисел a_n является ограниченным, т.е. существует такое число C , что $|a_n| \leq C$ для всех n . Аналогично определяется ограниченность последовательности сверху, снизу (напишите сами соответствующие неравенства), неограниченность, неограниченность сверху, снизу.

Например, $\{n^2\}$ — неограниченная последовательность, точнее, она является ограниченной снизу и не ограниченной сверху.

1.4. Предел последовательности.

Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся* (или стремящейся) к числу a , если для любой окрестности $O(a) = (b, c)$ точки a найдется такой номер N , что $a_n \in O(a)$ при $n \geq N$. Число a называется *пределом* последовательности $\{a_n\}$, и для обозначения этого используется запись

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ или } a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ниже в п. 1.9 мы дадим другое определение предела и докажем эквивалентность этих определений.

ПРИМЕР. Проверим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Пусть (a, b) — любая окрестность числа 0. Тогда $a < 0 < b$. Пусть N — наименьшее натуральное число, такое, что $N > 1/b$. Тогда при $n \geq N$ мы имеем $a < 0 < 1/n < b$.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Проверьте, что только что данное определение предела эквивалентно такому: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, если вне любой окрестности точки a может лежать только конечное число членов последовательности.

2. Проверьте, что если $a_n \equiv a = \text{const}$ для всех n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Иначе говоря, *предел последовательности, все члены которой равны постоянной*, т.е. не зависит от n , есть сама эта постоянная.

Если последовательность $\{a_n\}$ не имеет (конечного¹⁾) предела, то она называется *расходящейся*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Сходящаяся последовательность всегда ограничена.

В самом деле, если при $n \geq N$ мы имеем $b < a_n < c$, то при

всех n

$$\min\{a_1, \dots, a_{N-1}, b\} = C_1 \leq a_n \leq C_2 = \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, c\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратное утверждение неверно: *из ограниченности последовательности не следует ее сходимость*. Действительно, ограниченная последовательность $\{(-1)^n\}$ не имеет предела.

¹⁾ Бесконечные пределы будут определены в п. 1.16.

Чтобы показать это, допустим противное: пусть она имеет предел a . Тогда по определению предела в любой окрестности точки a должны лежать чиста $(-1)^n$ для всех достаточно больших n (т.е. для $n \geq N$ с некоторым N ; число N может зависеть от окрестности). Это означает, что в такой окрестности заведомо должны лежать числа -1 и 1 . Однако $-1 \notin (-1, B)$ для любого $B > 0$; значит, ни при каком $B > 0$ интервал $(-1, B)$ не является окрестностью точки a . Точно так же проверяется, что $a \notin (A, 1)$ при любом $A < 0$. Итак, $a \notin (A, 1) \cup (-1, B) = (A, B)$ ¹⁾ для любых $A < 0 < B$. Ясно, что это невозможно; значит, наша последовательность не имеет предела. (Мы проверим этот факт другим способом в п. 1.15.)

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интуитивно очевидно, что *одна и та же последовательность не может иметь два разных предела*. Это утверждение легко доказать вполне строго. Допустим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ и, например, $a < b$. Возьмем окрестности (c_1, d_1) и (c_2, d_2) точек a и b , такие, что $d_1 < c_2$:

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{c_1} \overbrace{(\quad\quad)}^{a} \overbrace{(\quad\quad)}^b \overbrace{\quad\quad\quad}^{d_2} \longrightarrow$$

Найдутся такие номера N_1 и N_2 , что $a_n \in (c_1, d_1)$ при $n \geq N_1$ и $a_n \in (c_2, d_2)$ при $n \geq N_2$. При $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ получается противоречие.

1.5. Предел монотонной последовательности. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*, если $a_n < a_{n+1}$ при всех n ; *неубывающей*, если $a_n \leq a_{n+1}$ при всех n ; *убывающей*, если $a_n > a_{n+1}$ при всех n ; *невозрастающей*, если $a_n \geq a_{n+1}$ при всех n . Во всех этих случаях $\{a_n\}$ называется *монотонной* последовательностью.

Теорема Вейерштрасса (о пределе монотонной последовательности). *Монотонная ограниченная последовательность стोит.*

¹⁾ Напомним, что $A \cup B$ — объединение множеств A и B , а $A \cap B$ — их пересечение. Эти знаки трудно перепутать, если иметь в виду, что \cup похож на первую букву слова «пересечение», а \cup — на первую букву английского слова «union» (объединение).

Заметим, что неубывающая последовательность всегда ограничена сверху своим первым членом, а невозрастающая последовательность ограничена сверху. Поэтому в случае неубывающей последовательности предположение фактически состоит в том, что она ограничена сверху, а в случае невозрастающей последовательности — что она ограничена снизу.

Эта важнейшая теорема доказывает строгое доказательство на

основании наших определений действительных чисел и предела последовательности. Но мы его только наметим, так как вынуждены экономить место и время на вопросах, связанных с введением действительных чисел.

Пусть для определенности $\{a_n\}$ — неубывающая ограниченная сверху последовательность. Предположим для простоты, что $\{a_n\}$ состоит из положительных чисел. Запретим запись десятично-rationальных чисел с цифром 9 в периоде. Пусть

$$(1) \quad a_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1}\alpha_{n2} \dots \alpha_{nk} \dots$$

Так как $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, то целые части α_{n0} образуют ограниченную последовательность чисел из \mathbb{Z}_+ , а в такой последовательности обязательно есть наибольшее число. Обозначим его через a_0 . Поскольку последовательность (1) неубывающая, найдется такой номер N_0 , что при $n \geq N_0$

$$a_n = \alpha_0, \alpha_{n1}\alpha_{n2} \dots \alpha_{nk} \dots$$

Рассмотрим первые десятичные знаки α_{n1} чисел (1). Они опять образуют неубывающую последовательность; она состоит из цифр $0, 1, \dots, 9$. Среди них найдется наибольшая, обозначим ее α_1 . Найдется такой номер $N_1 \geq N_0$, что при $n \geq N_1$

$$(2) \quad a_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_{n2} \dots \alpha_{nk} \dots$$

Теперь мы будем сравнивать вторые десятичные знаки a_{n2} у чисел (2) и найдем среди них наибольший α_2 .

И. Т. Д.

В результате этого бесконечного процесса возникает бесконечная десятичная дробь

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Можно проверить, что это и есть предел последовательности $\{a_n\}$. Мы не будем на этом останавливаться. Ср. [1].

Следующее замечание уточняет теорему Вейерштрасса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) Если $\{a_n\}$ — неубывающая последовательность, ограниченная сверху числом C_1 , то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ удовлетворяет неравенствам

$$a_n \leq a \leq C_1 \quad \text{при } \forall n. \quad (3)$$

2) Если $\{b_n\}$ — невозрастающая последовательность, ограниченная снизу числом C_2 , то предел $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ удовлетворяет неравенствам

$$C_2 \leq b \leq b_n \quad \text{при } \forall n. \quad (4)$$

Действительно, в первом случае, если допустить, что $a_n > a$ при некотором $n = n_0$, то в силу монотонности имеем $a_n \geq a_{n_0} > a$ для всех $n \geq n_0$; значит, в окрестности (c, a_{n_0}) точки a , где $c < a$, нет точек последовательности a_n с $n \geq n_0$, а это противоречит определению предела. Следовательно $a_n \leq a$ при всех n .

Допустим теперь, что $a > C_1$, и возьмем любое $d > a$. По определению предела, найдется такое N , что $a_n \in O(a) = (C_1, d)$ при $n \geq N$. Но это противоречит неравенству $a_n \leq C_1$, справедливому при всех n . Это противоречие и показывает, что $a \leq C_1$. \square

УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте неравенства (4) самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим об ограниченности в формулировке теоремы, конечно, существенно: возрастающая последовательность $\{n\}$ расходится. Условие монотонности можно немногоЙ ослабить: достаточно, чтобы последовательность была монотонной, начиная с некоторого номера n_0 (разумеется, неравенства $a_n \leq a$ и $b \leq b_n$ будут тогда верны при $n \geq n_0$).

Для имеющих предел a монотонных последовательностей мы иногда будем использовать обозначения $a_n \nearrow a$ (если $\{a_n\}$ не убывает) и $a_n \searrow a$ (если $\{a_n\}$ не возрастает).

1.6. Арифметические действия над действительными числами. Просмотрев предыдущие пункты, легко убедиться в том, что мы пока не пользовались арифметическими операциями над действительными числами и определение предела суммы сформулировать, не рассматривая разность $a_n - a$. Теперь отадим себе отчет в том, что арифметические действия над бесконечными десятичными дробями определять совсем не просто. На самом деле это можно сделать вполне строго, опираясь на теорему

Вейерштрасса о монотонных последовательностях. Например, давим определение суммы двух положительных чисел

$$a = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \quad \text{и} \quad b = \beta_0 \cdot \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n 00 \dots 0 \dots \quad (1)$$

Для этого заметим, что числа

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 00 \dots 0 \dots \quad \text{и} \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n 00 \dots 0 \dots \quad (2)$$

мы складывать умеем (отбрасывая нули и используя обычные правила арифметики). Пусть эта сумма есть,

$$c_n = \gamma_{n0}, \gamma_{n1} \gamma_{n2} \dots \gamma_{nn} 00 \dots 0 \dots \quad (4)$$

Можно проверить, что числа c_n образуют неубывающую последовательность, ограниченную сверху (например, числом $\alpha_0 + \beta_0 + 2$). Ее предел (существующий по теореме Вейерштрасса) называется суммой $a + b$ чисел a и b .

Аналогично определяется произведение положительных чисел (1). Мы умеем перемножать числа (2) и замечаем, что их произведения не убывают с ростом n и ограничены сверху числом $(\alpha_0 + 1)(\beta_0 + 1)$. Значит, эти произведения имеют предел; он и называется произведением ab чисел a и b .

УПРАЖНЕНИЕ. Дайте определения разности и частного (т. е. отношения) двух положительных чисел.

1.7. Модуль действительного числа и его свойства. Напомним, что модуль действительного числа a (или его абсолютной величиной) называется число

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Выпишем свойства модуля действительного числа:

$$|a| \geq 0 \quad \text{для любого } a, \text{ при этом } |a| = 0 \text{ только для } a = 0; \quad (2)$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad (3)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

Неравенство (4) называется *неравенством треугольника*.

Свойство (2) очевидно. Свойство (3) очевидно при $a \geq 0, b \geq 0$, но легко проверяется и в остальных случаях. Убедитесь в этом самостоятельно.

При доказательстве неравенства треугольника будем для определенности считать, что $a \leq b$. При этом возможны четыре случая:

- $0 \leq a < b$, б) $a < 0 \leq b$ и $a + b \geq 0$, в) $a < 0 \leq b$ и $a + b < 0$,
- г) $a \leq b < 0$. Пользуясь определением (1) модуля, получаем в случаях а) и г) равенства, а в случаях б) и в) очевидные (при $a < 0$ и $b \geq 0$) неравенства¹⁾ $|a + b| \leq -a + b$ и $-a - b \leq -a + b$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из неравенства треугольника следует, что для любых a и b

$$|a - b| \geq |a| - |b|. \quad (5)$$

Действительно,

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|;$$

поэтому $|a - b| \geq |a| - |b|$. Меняя a и b ролами, получаем неравенство $|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|$. Эти два неравенства вместе дают (5).

1.8*. Свойства действительных чисел. Согласно терминологии, принятой в высшей алгебре, множество \mathbb{R} действительных чисел является полем. Это означает, что арифметические действия обладают следующими свойствами.

Свойства сложения и вычитания:

- 1) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);
- 3) $a + 0 = a$;
- 4) $a + (-a) = 0$.

Свойства умножения и деления:

- 1) $ab = ba$ (коммутативность умножения);
- 2) $ab(c) = a(bc)$ (ассоциативность умножения);
- 3) $a \cdot 1 = a$;
- 4) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$);
- 5) $(a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность).

В поле действительных чисел есть дополнительная структура: оно *упорядочено*. Это означает, что для каждой пары чисел a , b справедливо хотя бы одно из двух соотношений $a \leq b$ или $b \leq a$, причем

- 1) $a \leq a$ для любого a ; если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$;
- 2) если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивность отношения порядка);
- 3) если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$ для любого c ;
- 4) если $0 \leq a$ и $0 \leq b$, то $0 \leq ab$.

¹⁾ Полезно заметить, что справедливы неравенства $1 \geq 0$ и $1 \geq 1$.

Приведенный здесь перечень свойств является основой для аксиоматического подхода к определению действительного числа, однако он не является полным. Полный набор аксиом действительных чисел можно найти, например, в [1].

Возможна аккуратная проверка всех перечисленных свойств на основании наших определений, см., например, [1–3]. Мы не будем на них останавливаться и в дальнейшем свободно будем пользоваться этими свойствами.

Упомянем другой подход к строгому введению действительных чисел метод сечений (см., например, [4]).

1.9. Новое определение предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы скажем, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Здесь мы используем разность $a_n - a$; в первоначальном определении предела арифметические операции не используются.

Говоря здесь о любом числе $\varepsilon > 0$, мы на самом деле имеем в виду сколь угодно малые положительные числа. Число N , вообще говоря, зависит от ε , $N = N(\varepsilon)$, и может неограниченно увеличиваться при уменьшении ε . Оно не зависит от ε , лишь если $a_n \equiv a$, начиная с некоторого номера.

Новое определение предела является стандартным, мы будем им постоянно пользоваться. Чемного ниже мы проверим эквивалентность наших двух определений предела.

Пусть $\varepsilon > 0$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ назовем ε -окрестностью точки a . Она обозначается через $O_\varepsilon(a)$.



Очевидно, что включение $x \in O_\varepsilon(a)$ равносильно неравенствам

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon,$$

или

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Поэтому новое определение предела можно переформулировать так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что $a_n \in O_\varepsilon(a)$ при $n \geq N$.

Теперь легко проверить эквивалентность старого и нового определений предела. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ в смысле старого определения; тогда, в частности, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что $a_n \in O_\varepsilon(a)$ при $n \geq N$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ в смысле нового определения. Обратно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ в смысле нового определения, и пусть $O(a) = (b, c)$ — любая окрестность точки a . Обозначим через ε наименьшее из расстояний от a до концов интервала (b, c) . Тогда $O_\varepsilon(a) \subset O(a)$:

$$\overbrace{b \quad a \quad \dots \quad O_\varepsilon(a)}^{\text{расстояние}} \longrightarrow c$$

Найдется такое N , что $a_n \in O_\varepsilon(a)$ при $n \geq N$; как следствие $a_n \in O(a)$ при $n \geq N$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ в смысле старого определения. \square

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Проверьте, что в обоих определениях предела последовательности неравенство $n \geq N$ можно заменить неравенством $n > N$ (т.е. проверьте, что получается определения, эквивалентные прежним).

2. Проверьте, что в новом определении предела неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ можно заменить на неравенство $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

3. Найдите $N = N(\varepsilon)$ для последовательности $a_n = 1/n$, стремящейся к 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся или расходятся одновременно, если одна получается из другой добавлением, отбрасыванием или изменением конечного числа членов; при этом в случае сходимости пределы совпадают.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Проверьте это замечание.

1.10. Бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Например, $\{1/n\}$ — бесконечно малая последовательность. Бесконечно малые последовательности обычно обозначают греческими буквами (впрочем, это соглашение не всегда соблюдаются).

Отметим несколько полезных утверждений.¹⁾

1. *Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a тогда и только тогда, когда $\{a_n - a\}$ — бесконечно малая последовательность.*
Это очевидно из определения предела в п. 1.9.

2. *Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — тоже бесконечно малая последовательность.*
Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. По определению предела существует N_1 , такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon_1$ при $n \geq N_1$, и N_2 , такое, что $|\beta_n| < \varepsilon_1$ при $n \geq N_2$. При $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ имеем

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad \square$$

3. *Если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то $\{\alpha_n a_n\}$ также является бесконечно малой последовательностью.*

Действительно, существует такое $C > 0$, что $|a_n| \leq C$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$. По определению предела существует N , такое, что $|\alpha_n| \leq \varepsilon_1$ при $n \geq N$; тогда при тех же n имеем $|\alpha_n a_n| = |\alpha_n| \cdot |\alpha_n| \leq C \varepsilon_1 = \varepsilon$. \square

Например, $\{(\sin n)/n\}$ — бесконечно малая последовательность, так как $|\sin n| \leq 1$ и $1/n \rightarrow 0$.

4. *Линейная комбинация $\{a_n + b_n\}$ бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ (a и b — постоянные) есть бесконечно малая последовательность.*

УПРАЖНЕНИЕ. Выполните утверждение 4 из утверждений 3 и 2.

1.11. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.

ТЕОРЕМА 1 (о пределе суммы). *Пусть*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b. \quad (1)$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b. \quad (2)$$

¹⁾ На наших лекциях утверждения из пунктов 1.10–1.13 обычно не доказываются, но частично этот материал разбирается на упражнениях. К первому коллоквиуму студенты должны научиться проводить доказательства по аналогии с доказательствами аналогичных утверждений для функций $y = f(x)$. Мы решили включить доказательства части теорем о последовательностях, чтобы облегчить работу тем, кто готовится по нашей книге самостоятельно.

Краткая формулировка: *предел суммы равен сумме пределов.*

Для доказательства теоремы 1 запишем a_n и b_n в виде $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые (см. утверждение 1 в п. 1.10). Тогда

$$(a_n + b_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n,$$

где в силу утверждения 2 из п. 1.10 сумма $\alpha_n + \beta_n$ является бесконечно малой последовательностью. Применяя еще раз утверждение 1, получаем (2). \square

ТЕОРЕМА 2 (о пределе произведения). *Пусть*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab. \quad (3)$$

Краткая формулировка: *предел произведения равен произведению пределов.*

Для доказательства теоремы 2 вновь воспользуемся представлением $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые. Тогда

$a_n b_n - ab = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$, и здесь сумма $a\beta_n + b\alpha_n$ является бесконечно малой последовательностью в силу утверждения 4, а произведение $\alpha_n\beta_n$ — в силу утверждения 3 из п. 1.10 (здесь последовательность α_n ограничена см. предложение в п. 1.4). Получаем, что последовательность $a_n b_n - ab$ — бесконечно малая, что и дает (3). \square

Из теоремы 2 (см. также упражнение 2 в п. 1.4) следует, в частности, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ab_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab \quad (4)$$

(постоянный множитель можно выносить за знак предела).

Используя (4) и теорему 1, легко проверить

СЛЕДСТВИЕ (свойство линейности предела). *Для любых чисел α и β*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha a + \beta b. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 3 (о пределе частного). *Пусть*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Если $b \neq 0$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}. \quad (6)$$

Краткая формулировка: *предел отношения равен отношению пределов, если предел знаменателя отличен от 0.*

Отметим, что при $b \neq 0$ числа b_n отличны от нуля, вообще говоря, лишь начиная с некоторого номера n_0 (см. доказательство ниже), и тогда последовательность a_n/b_n рассматривается лишь при $n \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так как $b_n \rightarrow b$, то для $\varepsilon = |b|/2$ существует n_0 , такое, что $|b_n - b| < \varepsilon = |b|/2$ при $n \geq n_0$.

Для доказательства теоремы 3. Так как $b_n \rightarrow b$, то для $\varepsilon = |b|/2$ существует n_0 , такое, что $|b_n - b| < \varepsilon = |b|/2$ при $n \geq n_0$.

Отсюда следует (см. рисунок), что при тех же значениях n справедлива оценка $|b_n| > |b|/2$ (в частности, $b_n \neq 0$), а значит,

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| \leq \frac{2}{|b|}. \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} &= \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{(a + \alpha_n)b - a(b + \beta_n)}{b(b + \beta_n)} \\ &= \frac{\alpha_n b - a\beta_n}{bb_n} = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n \right) \frac{1}{b_n}. \end{aligned}$$

Здесь выражение в круглых скобках справа является бесконечно малой последовательностью, а последовательность $1/b_n$ ограничена (см. (7)). Значит, $a_n/b_n - a/b$ в силу утверждения 3 из п. 1.10 является бесконечно малой последовательностью. Следовательно, $a_n/b_n \rightarrow a/b$ при $n \rightarrow \infty$. \square

1.12. Переход к пределу в неравенствах.

ТЕОРЕМА 1 (о предельном переходе в неравенстве). *Пусть*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad (1)$$

и пусть

$$a_n \leq b_n, \quad (2)$$

по крайней мере, начиная с некоторого номера ($n \geq n_0$). *Тогда*

$$a \leq b. \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $c_n = b_n - a_n$. В силу свойства линейности предела эта последовательность сходится и $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b - a$. Покажем, что $c \geq 0$.

Допустим, что $c < 0$. Тогда по определению предела в окрестности $(2c, 0)$ точки c окажутся все члены последовательности c_n , начиная с некоторого номера N . Но это невозможно, так как $c_n = b_n - a_n \geq 0$ при любом $n \geq n_0$. Итак, $b - a = c \geq 0$. \square

Замечание. Если $a_n < b_n$ ($n \geq n_0$), то нельзя утверждать, что $a < b$. Пример: $a_n = 0$, $b_n = 1/n$; здесь $a = b = 0$. Но неравенство $a \leq b$, разумеется, остается справедливым.

ТЕОРЕМА 2 (о предельном переходе в двух неравенствах).

Пусть

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (\text{при } n \geq n_0) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a. \quad (4)$$

Тогда последовательность c_n *тоже сходится и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a. \quad (5)$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела существует такое число N_1 , что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N_1$, а значит, $a_n - a > -\varepsilon$ при этих n . Аналогично, существует такое N_2 , что $|b_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N_2$, а значит, $b_n - a < \varepsilon$ при этих n . При $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ имеем

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

откуда $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$, или $|c_n - a| < \varepsilon$. \square

Пример применения этой теоремы содержится в пункте 1.14.

1.13. Метод математической индукции. Бином Ньютона. Напомним, в чем состоит *принцип математической индукции*.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — последовательность утверждений, зависящих от параметра n . Если известно, что

- 1) утверждение A_1 истинно (*база индукции*) и
- 2) для любого $n = 1, 2, \dots$ из истинности утверждения A_n вытекает истинность утверждения A_{n+1} (*шаг индукции*),

то все утверждения A_n , $n = 1, 2, \dots$, являются истинными.

Примеры *из жизни*: если в цепочке людей первый болен (база индукции) и известно, что каждый больной обязательно заражает соседа (шаг индукции), то каждый в этой цепочке рано или поздно окажется больным. Другой пример — принцип домино: если kostяшки установлены так, что, падая, каждая kostяшка заставляет следующую (т. е. обеспечен шаг индукции), то падение первой kostяшки (база индукции) вызывает падение всех.

Отметим, что принцип математической индукции эквивалентен следующему свойству натуральных чисел: *множество натуральных чисел является наименьшим числовым множеством, которое а) содержит 1, б) вместе с числом a содержит число $a + 1$.* Приняв это свойство натуральных чисел за аксиому, можно обосновать принцип математической индукции.

Метод доказательства утверждений, основанный на принципе математической индукции, называется *методом математической индукции*.

Применим метод математической индукции для доказательства формулы Ньютона для натуральной степени binoma $1 + x$.

ТЕОРЕМА. Для любого $n = 1, 2, \dots$ *справедлива формула*

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad (1)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \quad (2)$$

Числа (2) называются *биномиальными коэффициентами*.

Краткое название формулы (1): *бином Ньютона*.

Поясним, что $\sum_{k=0}^n a_k$ обозначает сумму $a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Правая часть в (1) — сумма, состоящая из слагаемых вида $C_n^k x^k$, где $k = 0, 1, \dots, n$. Напомним также, что $n!$ есть произведение всех целых чисел от 1 до n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ($n = 1, 2, \dots$), а $0! = 1$. Поэтому $C_n^0 = C_n^n = 1$.

При доказательстве теоремы нам понадобится следующее соотношение для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Оно проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k+1)!(k-1)!}{(n-k+1)n! + kn!} \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)k!} = \frac{(n-k+1)k!}{(n-k+1)k!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Базой индукции является формула (1) при $n = 1$; в проверке она не нуждается.

Сделаем шаг индукции, т.е. докажем, что из формулы (1) вытекает формула

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k. \quad (4)$$

Для этого умножим левую и правую части формулы (1) на $1+x$; получим

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k + \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} x^k \quad (\text{во второй сумме} \\ &\quad \text{заменили } k \text{ на } k-1) \\ &= C_n^0 + \sum_{k=1}^n C_n^k x^k + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} x^k + C_n^n x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) x^k + x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k x^k + x^{n+1} \quad (\text{см. формулу (3)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k. \quad \square \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5) \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Справедлива формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

которая также называется биномом Ньютона. Эта формула легко получается из (1), если положить $x = a/b$ и умножить левую и правую части полученного равенства на b^n .

1.14. Число e . Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{1}^{\infty}$, определяемую формулой

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Она заслуживает специального внимания.

ТЕОРЕМА. Последовательность (1) имеет конечный предел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что (1) — возрастающая последовательность. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n}. \end{aligned} \quad (2)$$

При замене n на $n+1$ в сумме справа каждый из сомножителей в скобках увеличивается:

$$1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}, \quad m = 1, \dots, k-1;$$

кроме того, появляется дополнительное положительное слагаемое (отвечающее номеру $k = n+1$). Отсюда видно, что последовательность (1) возрастает.

Теперь проверим, что последовательность (1) ограничена сверху числом 3. Из (2) следует, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}.$$

Отсюда с помощью простой оценки $k! \geq 2^{k-1}$ ($k \geq 2$) получаем, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Теперь воспользуемся известной формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Получаем

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Нам остается воспользоваться теоремой Вейерштрасса из п. 1.5: неубывающая ограниченная сверху последовательность (1) имеет конечный предел. \square

Существование предела (1) впервые доказал Д. Бернуlli (1728), а обозначение e для этого числа ввел Л. Эйлер (1736). Таким образом,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (3)$$

Так как $2 = a_2 < a_3$, то $2 < e \leq 3$; на самом деле число e можно считать с любой желаемой точностью (это будет объяснено в дифференциальном исчислении). Начало его десятичного разложения имеет вид¹⁾

$$e = 2,718281828 \dots \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \quad (5)$$

Указание: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$.

1.15. Подпоследовательности. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ — некоторая последовательность (для определенности заданная на \mathbb{N}), а $\{n_k\}_1^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел: $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$, $n_k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $n_k \geq k$ при всех k . Положим $b_k = a_{n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Последовательность $\{b_k\}_1^\infty$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}_1^\infty$.

ПРИМЕРЫ. 1. $\{(-1)^{2k}\}_1^\infty = \{1\}$ — подпоследовательность последовательности $\{(-1)^n\}_1^\infty$. Здесь $n_k = 2k$.

2. $\{1/2^k\}_1^\infty$ — подпоследовательность последовательности $\{1/n\}_1^\infty$. Здесь $n_k = 2^k$.

Очевидно, что каждая последовательность содержит бесконечно много подпоследовательностей.

ТЕОРЕМА (о пределе подпоследовательности). *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a , то тот же предел имеет любая ее подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По определению предела последовательности $\{a_n\}$ существует число N , такое, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Но $n_k \geq N$; поэтому при $k \geq N$ имеем $n_k \geq N$ и, следовательно, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. \square

ПРИМЕР 3. Возвращаясь к последовательности $\{(-1)^n\}$ (см. п. 1.4), легко указать ее подпоследовательности с разными пределами: $(-1)^{2k} = 1$, $(-1)^{2k-1} = -1$; поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k-1} = -1,$$

так как если $a_n = a$ при всех n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Отсюда снова видно, что последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится.

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $a_{2k} \rightarrow a$ и $a_{2k+1} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$). Покажите, что $a_n \rightarrow a$.

1.16. Пределы $+\infty$ и $-\infty$ ¹⁾. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$. Мы скажем, что она имеет предел $+\infty$, и будем писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{или} \quad a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

¹⁾ 1828 — год рождения Л. Н. Толстого. Заметим, что число e иррационально, так что бесконечная десятичная дробь (4) непериодична.

1) Читается «плюс бесконечность» и «минус бесконечность». Это удобные символы; числами они не являются.

если для любого (сколь угодно большого) числа t найдется такой номер $N = N(t)$, что $a_n > t$ для всех $n \geq N$. В этом случае говорят также, что последовательность $\{a_n\}$ *расходится к* $+\infty$. Знак $+$ можно опускать и писать ∞ вместо $+\infty$.

Аналогично, мы скажем, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $-\infty$, и будем писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{или} \quad a_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

если для любого числа t найдется такой номер $N = N(t)$, что $a_n < t$ для всех $n \geq N$. Здесь t достаточно считать сколь угодно большим по модулю отрицательным числом. В этом случае говорят также, что последовательность $\{a_n\}$ *расходится к* $-\infty$.

ПРИМЕР. Последовательность $\{an + b\}$ стремится к $+\infty$ при $a > 0$ и к $-\infty$ при $a < 0$.

Действительно, для произвольного t в качестве N возьмем любое натуральное число, превосходящее $(t - b)/a$. Тогда если $a > 0$, то при $n \geq N$ имеем

$$an + b \geq aN + b > a \cdot (t - b)/a + b = t.$$

Если $a < 0$ то при $n \geq N$

$$an + b \leq aN + b < a \cdot (t - b)/a + b = t. \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЯ. Проверьте следующие утверждения для бесконечных или не обязателльно конечных пределов:

1. Последовательность $\{a_n\}$ может иметь только один предел, конечный или бесконечный (но может и не иметь никакого предела).

2. Последовательность, имеющая предел $+\infty$ ($-\infty$), ограничена снизу (соответственно сверху).

3. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел, то тот же предел имеет любая ее подпоследовательность.

4. Не ограниченная сверху (снизу) последовательность обязательно содержит подпоследовательность с пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$), но может содержать и сходящуюся подпоследовательность (приведите пример).

5. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел, то тот же предел имеет последовательность $\{b_n\}$, получаемая из $\{a_n\}$ добавлением, отbrasыванием или изменением конечного числа членов.

6. Неубывающая не ограниченная сверху последовательность имеет своим пределом $+\infty$; невозрастающая не ограниченная снизу последовательность имеет своим пределом $-\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следующее утверждение является аналогом теоремы о предельном переходе в неравенстве (см. п. 1.12). *При* $a_n \leq b_n$ ($n \geq n_0$)

$$\text{из } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{следует } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty,$$

$$\text{из } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \quad \text{следует } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Это вытекает непосредственно из определения пределов $+\infty$ и $-\infty$.

1.17. Бесконечно большие последовательности; их связь с бесконечно малыми. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty.$$

Отсюда *не следует*, что $\{a_n\}$ имеет предел $+\infty$ или $-\infty$. Простейший пример: $\{(-1)^n n\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\{a_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то $a_n \neq 0$, по крайней мере, начиная с некоторого номера, и $\{1/a_n\}$ — бесконечно малая последовательность.*

Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$; по определению предела $+\infty$ существует такое N , что при $n \geq N$ справедливо неравенство $|a_n| > 1/\varepsilon$. Отсюда следует, что 1) $a_n \neq 0$ при $n \geq N$ (разумеется, номер, начиная с которого $a_n \neq 0$, не зависит от ε), 2) $|1/a_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$. \square

ТЕОРЕМА 2. *Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$, начиная с некоторого номера, то $\{1/\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность.*

В самом деле, пусть $\alpha_n \neq 0$ при $n \geq N_1$ и $t > 0$. По определению бесконечно малой последовательности, существует такое $N \geq N_1$, что при $n \geq N$ справедливо неравенство $|1/\alpha_n| > t$.

ПРИМЕР. Последовательность $\{n/\sin n\}$ — бесконечно большая. Поясним прежде всего, что $\sin n \neq 0$: $n \neq k\pi$ при натуральных n и k , так как число π иррационально. Поскольку $\{(\sin n)/n\}$ —

бесконечно малая последовательность (это отмечалось в п. 1.10), достаточно воспользоваться теоремой 2.

Впрочем, написать утверждение о последовательности $\{n/\sin n\}$ очевидно и без ссылки на теорему 2, так как

$$\left| \frac{n}{\sin n} \right| \geq n.$$

5 **1.18. Символы o и O .** Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — две последовательности.

Запись $a_n = O(b_n)$ (читается «последовательность a_n есть о-большое от b_n ») означает, что $a_n = b_n c_n$, где $\{c_n\}$ — ограниченная последовательность.

В частности, запись $a_n = O(1)$ означает, что $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность.

Примеры: $\sin n = O(1)$, $\frac{\sin n}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Запись $a_n = o(b_n)$ (читается «последовательность a_n есть о-малое от b_n ») означает, что $a_n = b_n \gamma_n$, где $\{\gamma_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

В частности, запись $a_n = o(1)$ означает, что a_n — бесконечно малая последовательность.

Например, $(\sin n)/n = o(1)$. Но это менее точное утверждение, чем $(\sin n)/n = O(1/n)$; из двух соотношений $a_n = o(1)$, $a_n = O(1/n)$ первое всегда следует из второго, а второе, вообще говоря, не следует из первого (приведите пример).

Подчеркнем, что записи $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$ не являются равенствами или тождествами в обычном понимании; их нельзя считать «справедливо» (например, справедливо утверждение $o(1) = O(1)$, но нельзя утверждать, что $O(1) = o(1)$).

Отметим также, что в случае, когда $b_n \neq 0$ (начиная с некоторого номера), наши определения можно записать в следующей форме: $a_n = O(b_n)$, если последовательность $\{a_n/b_n\}$ ограничена, и $a_n = o(b_n)$, если последовательность $\{a_n/b_n\}$ является бесконечно малой.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. «Расшифруйте» утверждение 2 из п. 1.10.

$$O(1)o(1) = o(1).$$

Запишите подобным образом утверждение 2 из п. 1.10.

2. Проверьте, что:

- | | |
|----|--------------------------------|
| а) | $a_n O(b_n) = O(a_n b_n)$, |
| б) | $a_n o(b_n) = o(a_n b_n)$, |
| в) | $O(a_n) O(b_n) = O(a_n b_n)$, |
| г) | $o(a_n) O(b_n) = o(a_n b_n)$, |
| д) | $O(O(a_n)) = O(a_n)$, |
| е) | $o(O(a_n)) = o(a_n)$, |
| ж) | $O(o(a_n)) = o(a_n)$. |

Приведите пример к каждому из утверждений а)–ж).

Последовательности a_n и b_n мы будем называть *эквивалентными* (точнее, асимптотически эквивалентными при $n \rightarrow \infty$) и писать $a_n \sim b_n$, если $a_n = b_n u_n$, где u_n последовательность, имеющая предел 1 при $n \rightarrow \infty$.

Соотношение $a_n = b_n u_n$ в этом определении можно переписать в виде $b_n = a_n \tilde{u}_n$, где $\tilde{u}_n = 1/u_n \rightarrow 1$. Поэтому если $a_n \sim b_n$, то $b_n \sim a_n$.

Отметим, что если последовательности a_n и b_n связаны соотношением $a_n = o(b_n)$, то в случае когда a_n и b_n — бесконечно малые, говорят, что a_n имеет *более высокий порядок малости*, чем b_n , а в случае когда a_n и b_n — бесконечно большие, говорят, что b_n имеет более высокий порядок роста, чем a_n .

Если $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$, то говорят, что a_n и b_n — имеют *одинаковый порядок* (малости или роста) при $n \rightarrow \infty$. В частности, таким свойством обладают эквивалентные при $n \rightarrow \infty$ последовательности.

Например, бесконечно малая последовательность $\{1/n^2\}$ имеет более высокий порядок малости, чем $\{1/n\}$. Последовательности $\{2/(n+1)\}$ и $\{1/n\}$ имеют одинаковый порядок малости, в то же время $2/(n+1) \sim 2/n$ ($n \rightarrow \infty$).

1.19. Кванторы \exists и \forall . Смысл этих знаков следующий: \exists — «существует», \forall — «для любого».

Например, утверждение «последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел» с учетом определения предела записывается при помощи этих кванторов следующим образом:

$$\exists a : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

(«Существует такое a , что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ ».) Обратите внимание на то, что двоечное в такого рода записях как правило заменяет слова «такой, что», «удовлетворяющий условию».

Если нужно сформулировать отрицание утверждения, то следует руководствоваться таким правилом: в записи этого утверждения при помощи кванторов нужно всподи квантор \exists заменить на \forall и, наоборот, \forall заменить на \exists .

Например, отрицание утверждения (1), т.е. утверждение «последовательность $\{a_n\}$ не имеет конечного предела», записывается так:

$$\forall a \exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

(«Для любого a существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом N найдется номер $n \geq N$, такой, что $|a_n - a| \geq \varepsilon$ ».) Здесь изменение знака в последнем неравенстве при переходе к отрицанию также является типичным. Однако знак в неравенстве $n \geq N$ не изменился. Безусловно надо проверять по смыслу то, что получается в результате применения нашего правила.

Многие важные теоремы анализа удобно доказывать от противного с использованием записи отрицания доказываемых утверждений при помощи кванторов.

УПРАЖНЕНИЕ. Запишите при помощи кванторов утверждение «последовательность $\{a_n\}$ ограничена». Сформулируйте и запишите при помощи кванторов отрицание этого утверждения.

1.20. Необходимые, достаточные и равносильные условия. Знаки импликации \Rightarrow , \Leftarrow и \Leftrightarrow . Математическое утверждение часто имеет такую структуру:

$$\text{Пусть выполняется } A. \text{ Тогда справедливо } B. \quad (1)$$

Здесь A — посылка, а B — утверждение теоремы. (В школе иногда говорят: «дано A ; доказать B ».)

Часто утверждение (1) формулируется так:

$$A \text{ достаточно для } B. \quad (2)$$

Утверждения (1) и (2) можно записать короче: $A \Rightarrow B$ (из A следует B).

Иногда утверждение вида (2) формулируют так:

$$B \text{ необходимо для } A \quad (3)$$

и записывают кратко следующим образом: $B \Leftarrow A$ (B следует из A).

Если

$$A \text{ необходимо и достаточно для } B, \quad (4)$$

т.е. $A \Leftarrow B$ и $A \Rightarrow B$, то утверждения (или условия) A и B называют *равносильными*, или *эквивалентными*, что записывают коротко так: $A \Leftrightarrow B$. Иногда утверждение (4) формулируют иначе:

$$A \text{ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется } B. \quad (5)$$

Отрицание условия A записывают так: \bar{A} .

Обратите внимание на следующее утверждение типа (4):

$$\{A \Rightarrow B\} \Leftrightarrow \{\bar{B} \Rightarrow \bar{A}\}. \quad (6)$$

«Из A следует B » и «из отрицания B следует отрицание $A» — эквивалентные утверждения.$

Из сказанного следует, что если одно из двух утверждений $\{A \Rightarrow B\}$, $\{\bar{B} \Rightarrow \bar{A}\}$ проверено, то второе проверять уже не нужно, оно верно автоматически.

Утверждение (6) можно «роверить» методом от противного. Однако метод доказательства от противного собственно и основан на утверждении (6). Действительно, типичное рассуждение «от противного» выглядит так: «Пусть A верно. Докажем, что верно B . Предположив, что B не верно, получим, что не верно A .

Полученное противоречие доказывает, что B верно.» Это рассуждение коротко можно записать так:

$$\{\bar{B} \Rightarrow \bar{A}\} \Rightarrow \{A \Rightarrow B\}$$

(ср. с (6)).

ПРИМЕРЫ. 1. Ограниченно́сть последовательности необходимо́ма, но не достаточно́ для ее сходимости.

2. Монотонность и ограниченность последовательности вместе сме́сте достаточны для ее сходимости.

3. Модуль числа разен нулю тогда и только тогда, когда само это число равно нулю:

$$|x| = 0 \iff x = 0.$$

4. Доказывая утверждение «две эквивалентные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ либо обе расходятся, либо обе расходятся», можно проверить лишь, что сходимость последовательности a_n влечет сходимость последовательности b_n .

§2. Пределы и непрерывность функций

2.1. Конечный предел в конечной точке. Мы переходим к рассмотрению функций $y = f(x)$, заданных на промежутках числовой оси. Напомним, что у нас уже были определены окрестность $O(a)$ и ε -окрестность $O_\varepsilon(a)$ точки a (см. пп. 1.1 и 1.9). Объединение двух интервалов (b, a) , (a, c) называется *проколотой окрестностью* точки a и обозначается через $\dot{O}(a)$. Объединение интервалов $(a - \varepsilon, a)$ и $(a, a + \varepsilon)$ (где $\varepsilon > 0$) называется *проколотой ε -окрестностью* точки a и обозначается через $\dot{O}_\varepsilon(a)$.

Следующее определение является одним из важнейших в анализе.

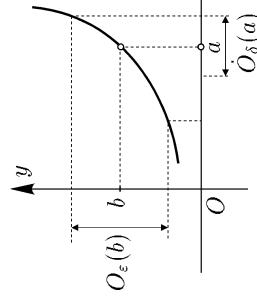


Рис. 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a . Говорят, что $f(x)$ имеет предел b при x , стремящемся к a , и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a), \quad (1)$$

если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{при } 0 < |x - a| < \delta, \quad (2)$$

или, что то же,

$$f(x) \in O_\varepsilon(b) \quad \text{при } x \in \dot{O}_\delta(a) \quad (3)$$

(см. рис. 1).

Как видно из этого определения, в нем не предполагается, что функция $f(x)$ определена в точке a , а если $f(x)$ задана в этой точке, то значение $f(a)$ не учитывается (см. рис. 2).

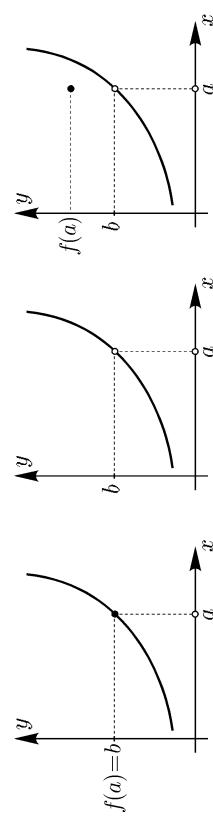


Рис. 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

В дальнейшем запись «при $x \rightarrow a$ » заменяет слова «при x , стремящемся к a ».

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \rightarrow a$* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Отметим, что понятие «бесконечно малая функция» (как и вообще понятие предела) имеет смысл лишь в том случае, когда указано, куда стремится независимая переменная x .

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a . Тогда она ограничена в некоторой проколотой δ -окрестности $O_\delta(a)$ этой точки.

Действительно, по определению предела функции для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$, существует $\delta > 0$, такое, что при $x \in O_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(x) - b| < 1$, или

$$-1 < f(x) - b < 1,$$

$$b - 1 < f(x) < b + 1. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если при условиях теоремы функция определена и в самой точке a , то ограниченность имеет место в некоторой полной окрестности $O_\delta(a)$. В самом деле, при $x \in O_\delta(a)$ (см. доказательство теоремы) имеем $C_1 \leq f(x) \leq C_2$, где $C_1 = \min\{f(a), b - 1\}$, $C_2 = \max\{f(a), b + 1\}$.

2. Утверждение, обратное к утверждению теоремы, неверно: из ограниченности функции в некоторой окрестности точки a не следует существование предела в этой точке. Например, функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

(см. рис. 3) ограничена, но не имеет предела при $x \rightarrow 0$ (покажите это).

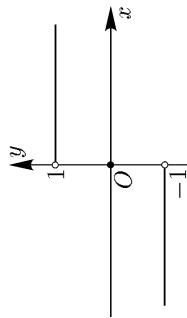


Рис. 3. Функция $y = \operatorname{sgn} x$

3. На рис. 1–3 и многих других изображены графики рассматриваемых функций. В соответствии с общим определением (см. п. 1.2) графиком функции $y = f(x)$ с областью определения X является множество точек на плоскости

$$\{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}.$$

Еще раз подчеркнем, что каждому $x \in X$ отвечает только одно y : мы рассматриваем только однозначные функции.

2.2. Непрерывность в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (включая эту точку). Эта функция называется *непрерывной* в точке a , если она имеет предел при $x \rightarrow a$, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

Иначе говоря, функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{при } |x - a| < \delta \quad (2)$$

(и.т.ч., что то же, $f(x) \in O_\varepsilon(f(a))$ при $x \in O_\delta(a)$); см. рис. 4.

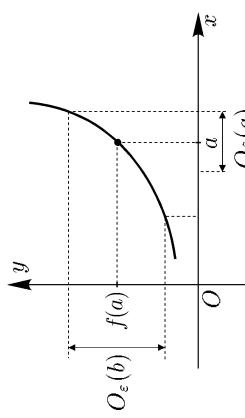


Рис. 4. Непрерывность функции в точке a

Обратите внимание на разницу в записи определений предела и непрерывности в точке a : неравенство $|x - a| < \delta$ определяет δ -окрестность точки a , а неравенства $0 < |x - a| < \delta$ — проколотую δ -окрестность этой точки.

ПРИМЕРЫ. 1. Функция $f(x) \equiv b = \text{const}$ непрерывна в каждой точке a числовой оси.

Действительно, в этом случае $f(x) - f(a) = 0$, и при любом $\varepsilon > 0$ в качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять любое положительное число.

2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке a .

Действительно, в этом случае $f(x) - f(a) = x - a$, так что для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Эти и дальнейшие примеры проверки функций на непрерывность весьма существенны: они приведут к теореме о непрерывности элементарных функций (см. ниже п. 4.10).

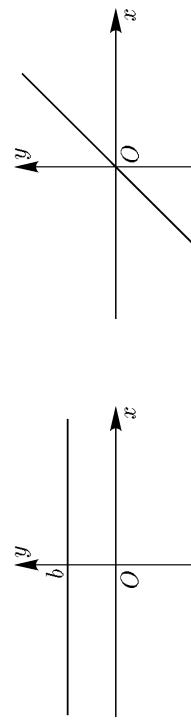


Рис. 5. Функция $y = b$, $y = x$

Перейдем к тригонометрическим функциям. Для изучения их свойств нам понадобится

ЛЕММА. При $0 < |x| < \pi/2$ справедливы неравенства

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (3)$$

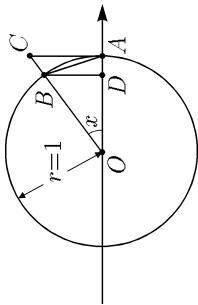


Рис. 6

Их нетрудно вывести, используя простые геометрические соображения. Пусть сначала $0 < x < \pi/2$. Из рис. 6 ясно, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOC , которая, в свою очередь, меньше площади треугольника AOC . Запишем эти соотношения, учитывая, что $|OA| = 1$, $|BD| = \sin x$, $|AC| = \tan x$:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x.$$

Первое из выписанных неравенств дает оценку $\frac{\sin x}{x} < 1$, из второго вытекает, что $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. Функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четны; поэтому неравенства (3) автоматически распространяются и на $x \in (-\pi/2, 0)$.

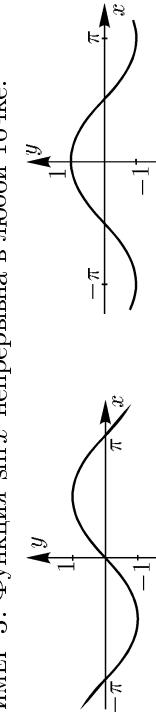
ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1, \quad \text{или} \quad |\sin x| < |x|, \quad (4)$$

на самом деле справедливо для всех $x \neq 0$.

Действительно, при $|x| \geqslant \pi/2$ имеем $|\sin x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant |x|$.

ПРИМЕР 3. Функция $\sin x$ непрерывна в любой точке.

Рис. 7. Функция $y = \sin x$, $y = \cos x$

Действительно, воспользовавшись формулой

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \quad (5)$$

и оценкой (4), мы получаем

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leqslant 2 \frac{|x-a|}{2} \cdot 1,$$

так что

$$|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a|. \quad (6)$$

Таким образом, для $f(x) = \sin x$ при любых a и ε подбирается $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

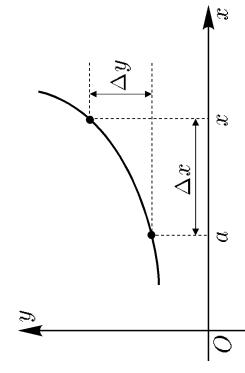
УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте аналогично непрерывность функции $\cos x$ в любой точке, используя неравенство (4) и формулу

$$\cos x - \cos a = 2 \sin \frac{a-x}{2} \sin \frac{x+a}{2}. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если надо найти предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и мы знаем, что $f(x)$ непрерывна в точке a , то исключим предел просто равен $f(a)$. Например,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Разность $\Delta y = f(x) - f(a)$ называется приращением функции $f(x)$ в точке a , отвечающим приращению $\Delta x = x - a$ независимой переменной (см. рис. 8).

Рис. 8. Приращения Δx и Δy

Определение непрерывности в точке можно перформулировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если она определена в окрестности этой точки и если бесконечно малому приращению независимой переменной в этой точке отвечает бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (8)$$

Действительно, это соотношение эквивалентно тому, что $f(x) - f(a) \rightarrow 0$ при $x - a \rightarrow 0$, т.е. (1).

2.3. Арифметические действия с пределами. Выпишем свойства бесконечно малых функций, аналогичные свойствам бесконечно малых последовательностей (см. п. 1.10):

1. Функция $f(x)$ стремится к b при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда $f(x) - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

2. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции, то $\alpha(x) + \beta(x)$ также является бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

3. Произведение $\alpha(x)f(x)$ функции $\alpha(x)$, бесконечно малої при $x \rightarrow a$, на функцию $f(x)$, ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a , есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

Утверждение 1 вытекает непосредственно из определения предела.

Утверждение 2 предлагается читателю в качестве несложного упражнения.

Проверим утверждение 3. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Функция $f(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки a , значит, существуют $\delta_1 > 0$ и $C > 0$, такие, что $|f(x)| \leq C$ при $0 < |x - a| < \delta_1$. Для $\varepsilon_1 = \varepsilon/C$ выберем $\delta_2 > 0$, такое, что $|\alpha(x)| < \varepsilon_1$ при $0 < |x - a| < \delta_2$. Тогда если $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то $|\alpha(x)f(x)| < \varepsilon_1C = \varepsilon$. \square

4. Линейная комбинация $a\alpha(x) + b\beta(x)$ бесконечно малых при $x \rightarrow a$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Это следует из утверждений 2 и 3.

Теперь при помощи рассуждений, почти дословно повторяющих соответствующие рассуждения из п. 1.11, нетрудно вывести следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (о пределе суммы). *Пусть*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c. \quad (1)$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c \quad (2)$$

(предел суммы равен сумме пределов).

ТЕОРЕМА 2 (о пределе произведения). *Пусть*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c. \quad (3)$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = bc \quad (3)$$

(предел произведения равен произведению пределов).

Из теорем 1 и 2 без труда выводится

СЛЕДСТВИЕ (свойство линейности предела). Для любых чисел β и γ из (1) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} (\beta f(x) + \gamma g(x)) = \beta \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \gamma \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta b + \gamma c. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите теоремы 1 и 2 и выведите из них свойство линейности предела.

ТЕОРЕМА 3 (о пределе частного). *Пусть*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad (5)$$

и $c \neq 0$. Тогда существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (5)$$

(предел отношения равен отношению пределов, если предел энаменателя отличен от нуля).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon = |c|/2$ существует такое $\delta_1 > 0$, что для всех $x \in O_{\delta_1}(a)$ справедлива оценка $|c - g(x)| < |c|/2$. Из этой оценки вытекает, что

$$|g(x)| = |c - (c - g(x))| \geq |c| - |c - g(x)| > |c| - |c|/2 = |c|/2.$$

Это означает, что функция $1/g(x)$ определена и ограничена в $O_{\delta_1}(a)$:

$$\left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{2}{|c|} \quad \text{при } x \in O_{\delta_1}(a). \quad (6)$$

Доказательство завершает несложное вычисление:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} &= \frac{b + \beta(x)}{c + \gamma(x)} - \frac{b}{c} = \frac{(b + \beta(x))c - b(c + \gamma(x))}{c(c + \gamma(x))} \\ &= \frac{\beta(x)c - b\gamma(x)}{cg(x)} = \left(\beta(x) - \frac{b}{c}\gamma(x) \right) \frac{1}{g(x)}. \end{aligned}$$

Здесь $\beta(x)$ и $\gamma(x)$, а, следовательно, и выражение в круглых скобках справа — бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции. Функция $1/g(x)$ в силу (6) ограничена. Остается применить утверждения 3 и 1 из п. 2.3. \square

СЛЕДСТВИЯ для непрерывных функций. 1. *Линейная комбинация $b f(x) + c g(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных в точке a , непрерывна в этой точке при произвольных b и c .*

2. *Произведение $f(x)g(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных в точке a , непрерывно в этой точке.*

3. *Отношение $f(x)/g(x)$ двух функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных в точке a , непрерывно в этой точке, если $g(a) \neq 0$.*

ПРИМЕРЫ. 1. Мы уже отмечали, что функции $f(x) = \text{const}$ и $f(x) = x$ непрерывны в каждой точке. Теперь получаем, что многочлен

$$P(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n \quad (7)$$

непрерывен в каждой точке. *Рациональная функция* (отношение двух многочленов)

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n}{d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \dots + d_m} \quad (8)$$

непрерывна в каждой точке, в которой знаменатель $Q(x)$ отличен от 0. (Напомним, что многочлен $Q(x)$ степени m может обращаться в 0 не более чем в m различных точках.)

2. Из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$ в каждой точке следует, что функции

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

непрерывны в тех точках, в которых они определены, т. е. $\operatorname{tg} x$ при $x \neq \pi k + \pi/2$, $\operatorname{ctg} x$ при $x \neq \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

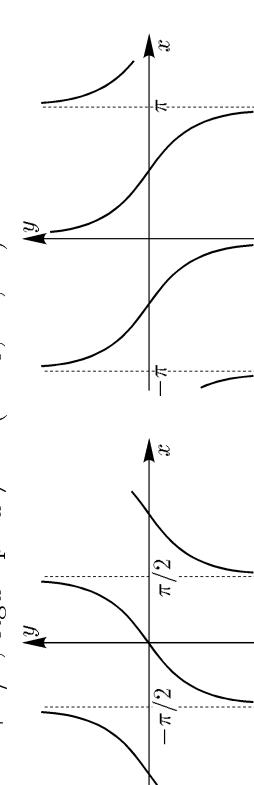


Рис. 9. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

7.4. Пределный переход в неравенствах. Теоремы этого пункта аналогичны теоремам п. 1.12 о последовательностях.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad (1)$$

и $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности точки a . Тогда $b \leq c$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма, которая будет применяться и в других ситуациях.

ЛЕММА (о сохранении знака). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и отрицательна в точке a . Тогда $f(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки a (т. е. если $f(a) > 0$, то $f(x) > 0$ в $O(a)$, а если $f(a) < 0$, то $f(x) < 0$ в $O(a)$).*

Действительно, положим $\varepsilon \equiv |f(a)|/2$. Тогда по определению непрерывности существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(a)| < |f(a)|/2$ при $x \in O_\delta(a)$. Отсюда следует, что если $f(a) > 0$, то $f(x) > f(a)/2 > 0$, а если $f(a) < 0$, то $f(x) < f(a)/2 < 0$ для всех x из $O_\delta(a)$. См. рис. 10. \square

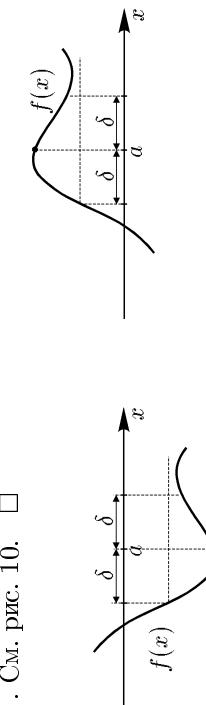


Рис. 10

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) - f(x), & x \neq a, \\ c - b, & x = a. \end{cases}$$

Она непрерывна в точке a , так как

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c - b = \varphi(a).$$

Теперь мы докажем утверждение теоремы от противного. Допустим, что $c - b = \varphi(a) < 0$. Тогда по лемме о сохранении знака $\varphi(x) < 0$, т. е. $g(x) < f(x)$, в некоторой проколотой окрестности точки a . Мы получили противоречие, которое и доказывает теорему. \square

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите на примере, что при выполнении неравенства $f(x) < g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a нельзя, вообще говоря, утверждать, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. (Неравенство $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leqslant \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ остается, конечно, в силе.)

Теорема 2 (о предельном переходе в двух неравенствах). *Пусть в некоторой проколотой окрестности точки a справедливы неравенства*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b. \quad (3)$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $\dot{O}_{\delta_0}(a)$ — проколотая окрестность, в которой справедливы неравенства (2). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела существует $\delta_1 > 0$, такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in \dot{O}_{\delta_1}(a)$ и $\delta_2 > 0$, такое, что $|g(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in \dot{O}_{\delta_2}(a)$. Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. При $x \in O_\delta(a)$ имеем

$$b - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < b + \varepsilon,$$

откуда $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$, или, что то же, $|g(x) - b| < \varepsilon$. \square

В следующем пункте эта теорема будет использована при доказательстве важного соотношения.

2.5. Первый замечательный предел.

Теорема (о первом замечательном пределе). *Справедлива формула*

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \quad (1)$$

Поясним, что при $x \rightarrow 0$ и числитель и знаменатель этой дроби стремятся к нулю и без спешального исследования неясно, как ведет себя дробь; такая ситуация носит название *неопределенности типа $\frac{0}{0}$* . Вычисля предел (1), мы *раскрываем* эту неопределенность.

Доказательство теоремы. Переайдем к пределу при $x \rightarrow 0$ в неравенствах

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

из леммы в п. 2.2, воспользовавшись теоремой 2 из п. 2.4. Поскольку функция $\cos x$ непрерывна, имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, что и дает (1). \square

Примеры. Следующие пределы вычисляются при помощи доказанной теоремы:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$

В обоих случаях снова раскрывается неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Упражнение. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x}$. Раскрывается ли здесь неопределенность?

2.6. Бесконечные пределы в конечной точке.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a . Мы скажем, что она имеет *предел* $+\infty$ при $x \rightarrow a$, и будем писать

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a), \quad (1)$$

если для любого (сколь угодно большого) числа h существует такое $\delta = \delta(h)$, что

$$f(x) > h \quad \text{при } x \in \dot{O}_\delta(a)$$

(см. рис. 11).

2.5. Первый замечательный предел.

Теорема (о первом замечательном пределе). *Справедлива формула*

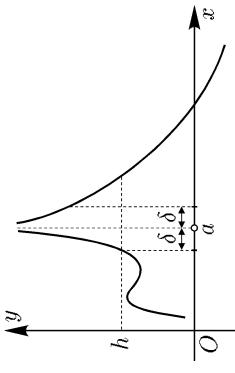


Рис. 11. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Упражнение 1. Сформулируйте самостоятельно определение предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ и сделайте соответствующий чертеж.

2. Докажите, что если $f(x) \leq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{O}(a)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (3)$$

(ср. с замечанием в п. 1.16).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \quad (4)$$

следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty, \quad (5)$$

где знак легко определяется.

Например, если $b > 0$ и $g(x) \rightarrow +\infty$, то $f(x)g(x) \rightarrow +\infty$. Приведем проверку этого утверждения, оставив читателю в качестве упражнения разбор остальных случаев.¹⁾

Пусть $h > 0$. Положим $h_1 = 2h/b$. По определению бесконечного предела, в некоторой проколотой окрестности $\dot{O}_{\delta_1}(a)$ справедливо неравенство $g(x) > h_1$. Кроме того, по определению конечного предела, в некоторой проколотой окрестности \dot{O}_{δ_2} мы имеем $|f(x) - b| < b/2$ и, в частности, $f(x) \geq b/2$. Выбрав меньшую из этих двух окрестностей, получим для точек x из этой окрестности $f(x)g(x) > (b/2) \cdot h_1 = h$. \square

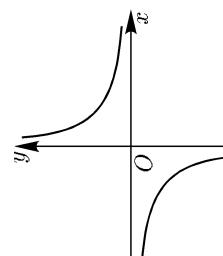


Рис. 12. Функция $y = \frac{1}{x}$

1) Внимательный читатель, вероятно, уже заметил, что изложение становится более обстоятельным, если предстоит знакомство с новыми приемами или идеями. Если подробности легко восстанавливаются или аналогично рассуждения уже встречались, то мы как правило излагаем доказательство более скжато.

2.7. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \rightarrow a$* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty.$$

Говоря о бесконечно большей функции, нужно обязательно указывать, куда стремится x . Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow a$, то $f(x)$ не обязательно имеет предел $+\infty$ или $-\infty$ при $x \rightarrow a$. Пример: $y = 1/x$ ($x \rightarrow 0$) (см. рис. 12).

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow a$, то $\alpha(x) = 1/f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ и $\alpha(x) \neq 0$ в $\dot{O}_\delta(a)$ при некотором $\delta > 0$, то $f(x) = 1/\alpha(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow a$.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите теоремы 1 и 2 (по образцу теорем 1 и 2 из п. 1.17).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в теореме 2 предположить дополнительно, что $\alpha(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности $\dot{O}(a)$, то можно утверждать, что при $x \rightarrow a$ функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ стремится к $+\infty$ или $-\infty$ (знак бесконечности совпадает со знаком $\alpha(x)$).

2.8. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность. Здесь нам понадобится понятие полуокрестности. Пусть $b < a < c$. Интервалы (b, a) и (a, c) называются соответственно *левой* и *правой полуокрестностями* точки a . Если $b = a - \delta$, $c = a + \delta$ ($\delta > 0$), то это левая и правая *δ-полуокрестности*; они обозначаются через $O_\delta^-(a)$ и $O_\delta^+(a)$ соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\dot{O}_\delta(a) = O_\delta^-(a) \cup O_\delta^+(a). \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть функция $f(x)$ определена в левой полуокрестности точки a . Мы скажем, что она имеет *предел b* при x , стремящемся к a слева, и будем писать

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a-0), \quad (2)$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{при } a - \delta < x < a. \quad (3)$$

Условие (3) можно записать при помони включения:

$$f(x) \in O_\varepsilon(b) \text{ при } x \in O_\delta^-(a) \quad (4)$$

(см. рис. 13).

Аналогично определяется предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ (см. рис. 14).



Рис. 13. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте это определение.

Для (конечных) односторонних пределов в точке a используются также обозначения $f(a - 0)$ (предел слева) и $f(a + 0)$ (предел справа). Если $a = 0$, пишут просто $f(-0)$ и $f(+0)$. Обратите внимание на то, что $a - 0$ и $a + 0$ — это лишь удобные обозначения (как, например, $-\infty$ или $+\infty$); их не следует связывать с соответствующими арифметическими операциями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда она имеет пределы слева и справа в этой точке и эти односторонние пределы совпадают.

Немного тотнее:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x). \quad (5)$$

Любое утверждение типа \iff содержит два самостоятельных утверждений: (\Rightarrow) и (\Leftarrow) . Поэтому доказательство разбиваем на две части.

(\Rightarrow) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ при $x \in O_\delta^-(a)$. Но $O_\delta^-(a) \subset O_\delta(a)$ (см. (1)); поэтому $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ при $x \in O_\delta^-(a)$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$. Аналогично проверяется соотношение $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

(\Leftarrow) Пусть теперь

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b. \quad (6)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Первое из соотношений (6) означает, что при некотором $\delta_1 > 0$ из $x \in O_{\delta_1}^-(a)$ следует $f(x) \in O_\varepsilon(b)$; второе из соотношений (6) означает, что существует $\delta_2 > 0$, такое, что из $x \in O_{\delta_2}^+(a)$ следует $f(x) \in O_\varepsilon(b)$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Очевидно, что $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ при $x \in O_\delta(a)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2. Сформулируйте самостоительно определения бесконечных односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty, \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty; \quad (8)$$

сделайте соответствующие чертежи.

3. Покажите, что утверждение (5) сохраняет силу, если в нем b заменить на $+\infty$ или $-\infty$.

4. Укажите односторонние пределы в точке 0 функций $\operatorname{sgn} x$ и $1/x$ (см. рис. 3 и 12).

На односторонние пределы переносятся теоремы, сформулированные выше в пп. 2.3, 2.4 и 2.7 для пределов при $x \rightarrow a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором полунаборе $[a, b)$. Она называется *непрерывной в точке a справа*, если эта функция имеет предел справа в точке a , равный значению $f(a)$ этой функции в точке a :

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a).$$

На языке « $\varepsilon-\delta$ »: $f(x)$ непрерывна в точке a справа, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $f(x) \in O_\varepsilon(f(a))$ при $x \in O_\delta^+(a)$.

Аналогично определяется непрерывность функции в точке a слева.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Сформулируйте это определение.

Из (5) следует (при $b = f(a)$), что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

2.9. Классификация точек разрыва. Здесь мы ограничим-

ся разбором следующей ситуации: условимся предполагать, что функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности

точки a . Если $f(x)$ не является непрерывной в точке a , то a называется *точкой разрыва* функции $f(x)$. Условие непрерывности в a можно записать равенствами

$$f(a - 0) = f(a) = f(a + 0). \quad (1)$$

В приведенной ниже классификации точек разрыва выделяются все возможные случаи нарушения этих условий.

1. Точка a называется *точкой устранимого разрыва*, если односторонние пределы существуют, конечны и совпадают,

$$f(a - 0) = f(a + 0), \quad (2)$$

но при этом или $f(x)$ не определена в точке a , или определена, но $f(a)$ не совпадает с пределами (2).

Такое название связано с тем, что если положить $f(a) = f(a \pm 0)$ (доопределить функцию в точке a в первом случае и изменяя ее значение в точке a во втором случае), то функция становится непрерывной в точке a .

ПРИМЕРЫ.

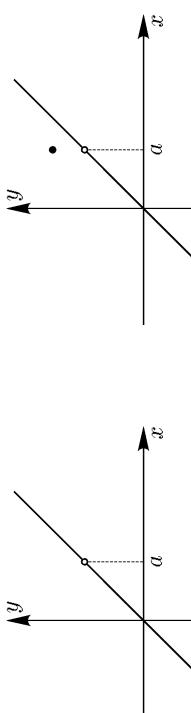


Рис. 15

$$1) \quad f(x) = x \quad \text{при } x \neq a. \quad 2) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \neq a, \\ a & \text{при } x = a. \end{cases}$$

В обоих случаях разрыв в точке a устраняется, если положить $f(a) = a$ (доопределить функцию $f(x)$ в случае 1) и изменения значение $f(a)$ в случае 2).

2. Функция $f(x)$ имеет в точке a *скакок*, если односторонние пределы $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$ существуют и конечны, но не совпадают.

В самой точке a при этом функция может быть определена или не определена; если она определена в a , то $f(a)$ может совпадать с одним из односторонних пределов (случай односторонней непрерывности) или не совпадать ни с одним из них.

Разность $f(a + 0) - f(a - 0)$ называется величиной скакка в точке a или просто скакком функции в этой точке.

ПРИМЕР. Функция $\operatorname{sgn} x$ (см. рис. 3) имеет скакок в точке 0, равный 2.

Если $f(x)$ имеет в точке a устранимый разрыв или скакок, то говорят, что a — *точка разрыва 1-го рода* этой функции.

3. Точка a называется *точкой разрыва 2-го рода* функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов этой функции в точке a не существует или бесконечен. В последнем случае точка a называется *точкой бесконечного разрыва*.

ПРИМЕРЫ. 1) Функция $1/x$ имеет в $x = 0$ точку бесконечного разрыва (см. рис. 12).

2) Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют бесконечные разрывы соответственно в точках $k\pi + \pi/2$ и $k\pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$) (см. рис. 9).

3) *Функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

имеет разрыв 2-го рода в любой точке: односторонние пределы нигде не существуют (см. ниже пример 1 в п. 2.14).

4) Функция $\sin(1/x)$ ($x \neq 0$) имеет разрыв 2-го рода в точке 0; односторонние пределы в этой точке не существуют (см. рис. 16) и пример 2 в п. 2.14.

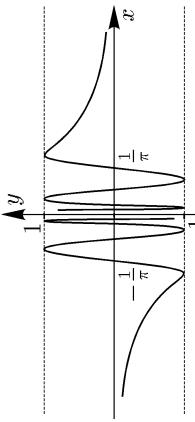


Рис. 16. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $f(x)$ определена только левее или только правее точки a и не определена в самой этой точке, то наша классификация не применима и мы не будем считать a точкой разрыва этой функции. Например, для функции $\lg x$ (определенной только при $x > 0$ и имеющей правый предел $-\infty$ в точке 0) точка $x = 0$ не считается точкой разрыва.

Однако если $f(x)$ определена, скажем, только на полуинтервале $[a, b)$ и $f(a) \neq f(a+0)$, или $f(x)$ не имеет предела в точке a справа, или этот предел не существует, то мы дополнительного договоримся считать, что функция разрывна в точке a справа.

2.10. Точки разрыва монотонной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве X . Она называется *неубывающей на X* , если $f(x_1) \leq f(x_2)$ при $x_1 < x_2$; *возрастающей на X* , если $f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2$; *некоторой* при $x_1 < x_2$ при $x_1 < x_2$; *убывающей на X* , если $f(x_1) > f(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

Нам понадобится следующий аналог теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности (см. п. 1.5).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x)$ — неубывающая функция на интервале (α, β) . Если она ограничена сверху некоторым числом c (т.е. $f(x) \leq c$), то она имеет в точке β предел слева, не превосходящий c :

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \leq c. \quad (1)$$

Аналогично, если она ограничена снизу некоторым числом d , то существует предел в точке α справа, не меньший d :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \geq d. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование предела слева в точке β . Зададим любую возрастающую последовательность $\{x_n\}$ чисел из (α, β) , имеющую пределом точку β . Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ не убывает, ограничена сверху числом c и по теореме Вейерштрасса

$$f(x_n) \nearrow b \leq c. \quad (3)$$

Покажем, что число b является пределом слева функции $f(x)$ в точке β .

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Из (3) вытекает, что если n_0 достаточно велико, то $f(x_{n_0}) > b - \varepsilon$. Положим $\delta = \beta - x_{n_0}$. Тогда $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $x \in O_\delta^-(\beta) = (x_{n_0}, \beta)$. Действительно, так как $x_n \nearrow \beta$, то для любого $x < \beta$ существует n_1 , такое, что $x < x_{n_1}$. Следовательно, для $x \in (x_{n_0}, \beta)$ ввиду монотонности функции $f(x)$ имеем

$$b - \varepsilon < f(x_{n_0}) \leq f(x) \leq f(x_{n_1}) \leq b,$$

откуда следует, что $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Аналогично доказывается существование предела в точке α справа. \square

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Сформулируйте аналогичную теорему для невозрастающей функции.

2. Проверьте, что если $f(x)$ — неубывающая функция на (α, β) , не ограниченная сверху, то

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty.$$

Теорема 2 (о точках разрыва монотонной функции). Пусть функция $f(x)$ задана и монотона в некоторой окрестности точки a , и пусть a — точка разрыва этой функции. Тогда $f(x)$ имеет скачок в точке a .

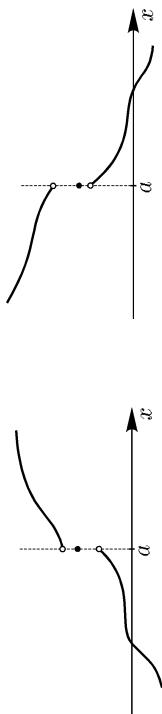


Рис. 17. Точки разрыва монотонных функций

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $f(x)$ — неубывающая функция. Тогда в левой полукрестности точки a эта функция ограничена сверху числом $f(a)$. Из теоремы 1 следует существование предела $f(a-0) \leq f(a)$. По аналогичной причине существует $f(a+0) \geq f(a)$. При этом $f(a-0) \neq f(a+0)$, так как a — точка разрыва. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства видно, что в точке разрыва a в случае неубывающей функции $f(a-0) < f(a+0)$ (а если $f(x)$ не возрастает, то $f(a-0) > f(a+0)$). Значение $f(a)$ находится на отрезке с концами $f(a-0)$, $f(a+0)$.

2.11. Точки разрыва рациональной функции. Рассмотрим рациональную функцию

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

— отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Мы уже отмечали в п. 2.3, что $R(x)$ непрерывна в каждой точке, в которой знаменатель $Q(x)$ отличен от 0.

ТЕОРЕМА. Пусть $Q(x)$ обращается в нуль в точке a . Тогда это точка разрыва функции $R(x)$. Каждая такая точка есть либо точка устранимого разрыва, либо точка бесконечного разрыва. В последнем случае в точке разрыва есть односторонние бесконечные пределы.

Доказательство. По известной теореме из алгебры¹⁾

$$Q(x) = (x - a)^l Q_1(x),$$

где l — натуральное число и $Q_1(x)$ — новый многочлен, не обращающийся в 0 в точке a (степень $\deg Q_1$ равна $\deg Q - l$). Не исключено, что $P(x)$ тоже обращается в 0 в точке a ; поэтому запишем $P(x)$ в виде

$$P(x) = (x - a)^k P_1(x),$$

где k — целое неотрицательное число и многочлен $P_1(x)$ не обращается в 0 в точке a . Теперь имеем (при $x \neq a$)

$$R(x) = (x - a)^{k-l} R_1(x),$$

где $R_1(x) = P_1(x)/Q_1(x)$ — непрерывная в точке a рациональная функция, отличная от 0 в этой точке. При $x \rightarrow a$ она стремится к $R_1(a) \neq 0$, и мы видим, что возможны следующие случаи.

1) $k \geq l$. Функция $R(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, равный 0, если $k > l$, и $R_1(a)$, если $k = l$. Функция $R(x)$ имеет устранимый разрыв в точке a .

2) $k < l$. В этом случае $|(x - a)^{k-l}| \rightarrow +\infty$, а $R_1(a) \neq 0$. Поэтому $|R(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a \pm 0$. В силу непрерывности функция $R_1(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $O_\delta(a)$. Это означает, что $R(x)$ имеет постоянный знак в каждой из полуокрестностей $O_\delta^-(a)$, $O_\delta^+(a)$. (Совпадение или различие этих знаков зависит от того, четно $l - k$ или нечетно.) Функция $R(x)$ имеет односторонние бесконечные пределы в точке a .

Итак, каждая точка разрыва рациональной функции — это точка устранимого разрыва или точка бесконечного разрыва с бесконечными односторонними пределами. \square

ПРИМЕР. Функция

$$R(x) = \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

¹⁾ Эта теорема доказывается в курсе линейной алгебры во 2-м семестре.

имеет устранимый разрыв в точке $x = 1$ и бесконечный разрыв в точке $x = -1$.

УПРАЖНЕНИЕ. Укажите здесь значение $R(1)$, устраниющее разрыв в точке $x = 1$, и пределы $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} R(x)$.

2.12. Пределы на бесконечности. Нам еще нужно определить пределы

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= b, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= b, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

Мы определим первый и последний из этих пределов.

Интервал $(-\infty, a)$ назовем *a-окрестностью* *многу бесконечности* и будем обозначать через $O_a(-\infty)$. Аналогично интервал $(a, +\infty)$ назовем *a-окрестностью* *плюс бесконечности* и будем обозначать через $O_a(+\infty)$.

Мы скажем, что она имеет *предел в* $O_a(-\infty)$ при некотором a . Пусть функция $f(x)$ определена в $O_a(-\infty)$ и будем писать

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow -\infty),$$

если для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется такое $h = h(\varepsilon)$, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{при } x < h,$$

или, что то же, $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ при $x \in O_h(-\infty)$.

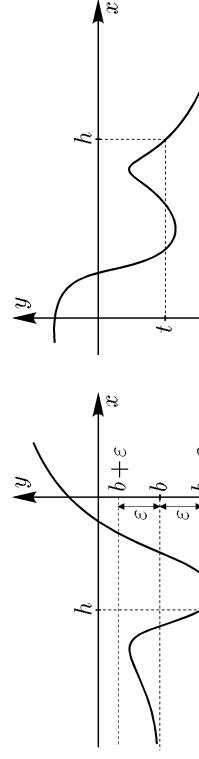


Рис. 18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Пусть функция $f(x)$ определена в $O_a(+\infty)$ при некотором a . Мы скажем, что она имеет *предел в* $O_a(+\infty)$ при $x \rightarrow +\infty$, и будем писать

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

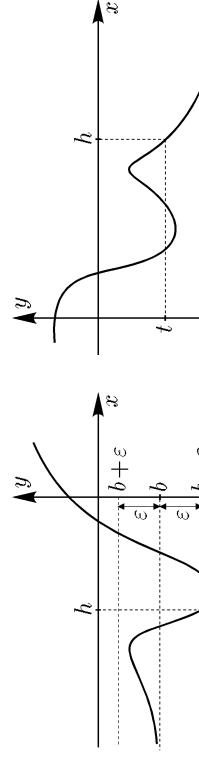


Рис. 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

если для любого числа t найдется такое $h = h(t)$, что

$$f(x) < t \quad \text{при } x > h,$$

или, что то же, $f(x) \in O_t(-\infty)$ при $x \in O_h(+\infty)$. Здесь t достаточно считать отрицательным и сколь угодно большим по модулю.

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Дайте определения осталых четырех пределов и сделайте соответствующие чертежи.

2. Проверьте, что если $f(x)$ не убывает на промежутке $[a, +\infty)$ и не ограничена сверху, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Это аналог задачи 6 о последовательностях из п. 1.16.

Наконец, мы будем писать

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad (-\infty \leqslant b \leqslant +\infty),$$

если

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

ПРИМЕРЫ. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $h = 1/\varepsilon$. Тогда при всех $|x| > h$

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{h} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} x$ не существует. Но $\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = +\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

9 2.13. Предел сложной функции. Пусть $z = f(y)$ — функция, определенная на множестве Y точек y , а $y = g(x)$ — функция, определенная на множестве X точек x , причем выполнено следующее условие:

$$g(x) \in Y \quad \text{при } x \in X,$$
(1)

т.е. значения функции $g(x)$ принадлежат области определения функции $f(y)$. Тогда на X определена функция

$$z = f(g(x)). \quad (2)$$

Она называется *сложной функцией*, составленной из функций f и g ; при этом f обычно называют *внешней функцией*, а g — *внутренней функцией*.

Например, $z = \sin(x^2)$ ($x \in \mathbb{R}$) — сложная функция, состоявшая из (внешней) функции $z = \sin y$ и (внутренней) функции $y = x^2$; $z = (\sin x)^2$ ($x \in \mathbb{R}$) — сложная функция, составленная из $z = y^2$ и $y = \sin x$.

Другие названия для сложной функции (2): *композиция* функций f и g , *уперпозиция* функций f и g . Используется также обозначение $f \circ g$:

$$z = (f \circ g)(x). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1 (о непрерывности сложной функции). *Пусть функция $y = g(x)$ непрерывна в точке a , а функция $z = f(y)$ непрерывна в соответствии с точке $b = g(a)$. Тогда сложная функция $(f \circ g)(x)$ непрерывна в точке a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(y)$ непрерывна в точке b , существует такое $\sigma > 0$, что $f(y) \in O_\varepsilon(f(b))$ при $y \in O_\sigma(b)$. В свою очередь, из непрерывности функции $g(x)$ в точке a вытекает существование такого $\delta > 0$, что $g(x) \in O_\sigma(g(a))$ при $x \in O_\delta(a)$. В итоге с учетом того, что $g(a) = b$, имеем

$$x \in O_\delta(a) \implies g(x) \in O_\sigma(b) \implies f(g(x)) \in O_\varepsilon(f(b)), \quad (4)$$

т.е. $f(g(x)) \in O_\varepsilon(f(b))$ при $x \in O_\delta(a)$. \square

ПРИМЕР 1. Функция $z = \sin x^2$ и $z = (\sin x)^2$ непрерывны в каждой точке.

Если положить $g(a) = b$ и $f(b) = c$, то утверждение теоремы можно записать так: из

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c \quad (5)$$

следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c. \quad (6)$$

Возникает вопрос, можно ли здесь отказаться от условий непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$. Оказывается, что можно отказаться от предположения о непрерывности внутренней функции.

Теорема 2 (о пределе сложной функции). *Из (5) следует (6) если внешняя функция непрерывна в точке b , т. е. если $c = f(b)$.*

Доказательство по существу повторяет доказательство предыдущей теоремы. Сначала (как в упомянутом доказательстве) по ε выбирается $\sigma > 0$; затем по определению предела выбирается $\delta > 0$, такое, что $g(x) \in O_\sigma(b)$ при $x \in \dot{O}_\delta(a)$. Теперь имеем

$$x \in \dot{O}_\delta(a) \implies g(x) \in O_\sigma(b) \implies f(g(x)) \in O_\varepsilon(f(b)), \quad (7)$$

и здесь отличие от (4) состоит только в том, что мы не рассматриваем точку $x = a$. \square

От условия непрерывности внешней функции в точке b нельзя освободиться. Это видно из следующего примера.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \neq 2, \\ 0 & \text{при } y = 2 \end{cases}$$



Рис. 20

и $g(x) \equiv 2$ при всех x (см. рис. 20). Внутренняя функция непрерывна в каждой точке, а внешняя имеет устранимый разрыв в точке 2. При любом a мы имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2, \quad \lim_{y \rightarrow 2} f(y) = 1, \quad \text{но } \lim_{x \rightarrow a} (f(g(x))) = 0,$$

поскольку $f(g(x)) \equiv 0$.

Оказывается, если наложить разумные требования на внутреннюю функцию $g(x)$, то требование непрерывности внешней функции $f(x)$ в точке b (а заодно и условие конечности предела c) тоже можно снять,

Теорема 3 (о пределе сложной функции). *Пусть*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c,$$

$-\infty \leq c \leq +\infty$, и пусть $g(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{O}(a)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c.$$

Доказательство снова изменяется незначительно. Поясним, что вместо (4) и (7) получается

$$x \in \dot{O}_\delta(a) \implies g(x) \in \dot{O}_\sigma(b) \implies f(g(x)) \in O_\varepsilon(c). \quad \square$$

На теореме о сложной функции основан приём вычисления предела, который называют *методом замены переменной*.

Например, вычисляя предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2}$ (см. пример 2 в п. 2.5), мы на самом деле неявно сделали замену переменной $y = x/2$ и свели вычисление к первому замечательному пределу $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$. При этом мы фактически представили функцию под знаком предела как сложную функцию $f(g(x))$, где $g(x) = x/2$, а $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, и воспользовались тем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$, а $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Требование $g(x) \neq b$ ($x \in \dot{O}(a)$) в теореме 3 не слишком обременительно. В частности, это требование выполняется, если функция $y = g(x)$ строго монотонна в окрестности точки a , так что замена $y \leftrightarrow x$ «работает в обе стороны».

Если вместо b мы имеем $+\infty$ или $-\infty$, то никаких предположений делать не нужно («опасная» точка b в этом случае просто отсутствует), так что справедлива

Теорема 4 (о пределе сложной функции). *Из*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = c \quad (8)$$

следует, что $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

Здесь, как и в предыдущей теореме, $-\infty \leq c \leq +\infty$. Ясно, что можно сформулировать аналогичную теорему с $-\infty$ вместо $+\infty$ в соотношениях (8).

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите теорему 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко понять, что справедливы «односторонние» аналоги теорем 2–4: пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ можно заменить любым из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$, а также $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

2.14. Определение предела функции по Гейне. К теоремам о пределе сложной функции близкó также следующее утверждение:

ТЕОРЕМА. *Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$.*

Здесь $-\infty \leq a \leq +\infty$ и $-\infty \leq b \leq +\infty$; аналогичная теорема верна и для односторонних пределов (a заменяется на $a+0$ или $a-0$).

Доказательство теоремы проведем для случая конечных a и b .

(\Rightarrow) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ при $x \in \dot{O}_\delta(a)$. По определению предела последовательности существует такое N , что $x_n \in O_\delta(a)$ при $n \geq N$. Учитывая, что $x_n \neq a$, имеем

$$n \geq N \implies x_n \in \dot{O}_\delta(a) \implies f(x_n) \in O_\varepsilon(b),$$

откуда вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

(\Leftarrow) Пусть теперь $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Чтобы показать, что тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, допустим противное: существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ можно выбрать точку $x \in \dot{O}_\delta(a)$, такую, что $f(x) \notin O_{\varepsilon_0}(b)$. Выберем точку x_n с таким свойством для $\delta = 1/n$ при каждом n . Последовательность $\{x_n\}$ стремится к a (так как $|x_n - a| < 1/n$), и $x_n \neq a$. Однако $f(x_n)$ не может стремиться к b , так как $f(x_n) \notin O_{\varepsilon_0}(b)$ при всех n . Полученное противоречие доказывает вторую часть теоремы. \square

Доказанная теорема фактически утверждает, что определение предела функции из п. 2.1 эквивалентно следующему:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что функция $f(x)$ имеет предел b при $x \rightarrow a$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$.

Это определение обычно связывают с именем немецкого математика Г. Гейне, а определение предела из п. 2.1 — с именем французского математика О. Коши.

УПРАЖНЕНИЕ. Дайте определение по Гейне односторонних пределов функции.

ПРИМЕРЫ. 1. Функция Дирихле (см. п. 2.9) не имеет односторонних пределов ни в одной точке a на числовой оси.

Чтобы показать, что функция Дирихле в произвольной точке a , скажем, не имеет предела слева, достаточно построить последовательность рациональных чисел $\{\hat{x}_n\}$, такую, что $\hat{x}_n < a$, $\hat{x}_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), и последовательность иррациональных чисел \tilde{x}_n с теми же свойствами. Тогда $D(\hat{x}_n) = 1$, $D(\tilde{x}_n) = 0$ при любом n и мы получим разные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{x}_n) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D(\tilde{x}_n) = 0.$$

Нужные последовательности для произвольного числа $a > 0$ можно построить, взяв в качестве \hat{x}_n любое рациональное, а в качестве \tilde{x}_n — любое иррациональное число из интервала $(a-1/n, a)$ (см. предложение в п. 1.1).

2. Функция $\sin(1/x)$ не имеет предела при $x \rightarrow +0$, поскольку, например, для сходящейся к $+0$ последовательности $x_n = \frac{1}{\pi n + \pi/2}$ имеем $\sin(1/x_n) = \sin(\pi n + \pi/2) = (-1)^n$; эта последовательность не имеет предела (см. п. 1.15).

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ($n \rightarrow \infty$) для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a .*

В этом следствии в отличие от теоремы нет смысла накладывать ограничение $x_n \neq a$.

§3. Некоторые свойства числовой прямой

В этом параграфе собраны важнейшие вспомогательные утверждения о числовой прямой, используемые дальше при построении курса анализа.

3.1. Лемма о вложенных отрезках.

ЛЕММА (о вложенных отрезках). *Пусть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ — последовательность вложенных друг в друга отрезков:*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots . \quad (1)$$

Тогда если длина отрезка $[a_n, b_n]$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, то пересечение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0, \quad (2)$$

то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \quad (3)$$

этих отрезков непусто и состоит из одной точки c , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c. \quad (4)$$

Доказательство. Из условия (1) вытекает, что $\{a_n\}$ — небывающаяся, а $\{b_n\}$ — невозрастающая последовательность. Эти последовательности ограничены, так как $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$; поэтому по теореме Вейерштрасса эти последовательности сходятся: $a_n \nearrow a$, $b_n \searrow b$. Следовательно, $b_n - a_n \rightarrow b - a$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из условия (2) видно, что $b - a = 0$, т. е. $a = b$. Этую точку обозначим через c .

Ясно, что $a_n \leq a$ (см. замечание 1 в гл. 1.5) и $b \leq b_n$; поэтому $a_n \leq c \leq b_n$, т. е. $c \in [a_n, b_n]$ для любого n .

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a = b \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$

Точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$, единственна. Действительно, пусть $c_0 < c_1$ — две точки, такие, что $c_0, c_1 \in [a_n, b_n]$ для любого n . Положим $\varepsilon = c_1 - c_0$ и выберем n настолько большим, что $b_n - a_n < \varepsilon$. Получим противоречие: на отрезке $[a_n, b_n]$ длины $< \varepsilon$ не могут лежать точки, расстояние между которыми равно ε . \square

Замечания. 1. Аналогичное утверждение для интервалов (a_n, b_n) вместо отрезков не справедливо. Например, при $a_n = 0$, $b_n = 1/n$ пересечение интервалов (a_n, b_n) оказывается пустым (проверьте).

2. Если в формулировке леммы опустить условие (2), то пересечение (3) будет отрезком $[a, b]$, где

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a < b \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

Последовательность (1) вложенных друг в друга отрезков будем называть *стягивающейся*, если выполнено условие (2).

3.2. Лемма Больцано–Вейерштрасса.

Лемма (Больцано–Вейерштрасса). Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е. существует такие числа a и b , что

$$a \leq x_n \leq b \quad \text{при всех } n.$$

Мы сначала докажем, что существует стягивающаяся последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, каждый из которых содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Последовательность отрезков будем строить при помощи индукции. В качестве $[a_1, b_1]$ возьмем отрезок $[a, b]$ (база индукции).

Пусть отрезок $[a_k, b_k]$, содержащий бесконечно много членов последовательности, уже построен. Разделим отрезок $[a_k, b_k]$ на две равные части серединой с этого отрезка. По крайней мере один из отрезков $[a_k, c]$, $[c, b_k]$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (так как в противном случае и на их объединении $[a_k, b_k]$ таких членов также лишь конечное число, что противоречит предположению индукции). В качестве $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ выберем именно такой отрезок (любой, если оба отрезка содержат бесконечно много членов последовательности).

Длина отрезка каждого раз уменьшается вдвое: $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$; поэтому

$$b_k - a_k = 2^{-k+1}(b_1 - a_1) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Итак, нужная последовательность отрезков построена. Выберем теперь последовательно на каждом из отрезков $[a_k, b_k]$ (начиная с первого) точку x_{n_k} так, чтобы выполнялось условие $n_{k+1} > n_k$. Это возможно, поскольку на каждом из наших отрезков есть члены последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами. Полученная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится. Действительно, по лемме о вложенных отрезках существует

точка c , такая, что $a_k \rightarrow c$ и $b_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Переходя к пределу в двух неравенствах

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$$

(см. теорему 2 в п. 1.12), получаем, что $x_{n_k} \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. \square

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Обратим внимание читателя на реализованную в доказательстве теоремы идею, основанную на применении леммы о вложенных отрезках. Чтобы найти на отрезке точку, обладающую определенным свойством (в доказанной теореме это точка, в любой окрестности которой есть бесконечно много членов последовательности), нужно построить стягивающуюся последовательность отрезков, каждый из которых заведомо содержит хотя бы одну такую точку. Эта простая идея далее будет использоваться довольно часто.

Точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много членов последовательности, называется ее *частичным пределом* (или *точкой сгущения*). Отметим, что последовательность может иметь несколько или даже бесконечно много частичных пределов. Например, -1 и 1 — частичные пределы последовательности $\{(-1)^n\}$. Можно показать (но это сделать не просто), что любая точка отрезка $[-1, 1]$ является частичным пределом последовательности $\{\sin n\}$.

2. Предположение об ограниченности в лемме Больцано–Вейерштрасса существенно. Например, последовательность $\{n\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей (любая ее подпоследовательность неограничена и, значит, не может сходить).

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Проверьте, что любая неограниченная последовательность содержит подпоследовательность, расходящуюся к $-\infty$ или $+\infty$.

2. Покажите, что число a является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящаяся к a .

3.3. Лемма Бореля. Дадим сначала определение покрытия множества на числовой прямой системой интервалов. Пусть заданы множество M и система интервалов $\{I_\alpha\} = (a_\alpha, b_\alpha)$ числовой прямой, где индекс α пробегает некоторое множество A . Отметим, что множество индексов A может быть бесконечным и не обязательно состоять из натуральных чисел (например, $\{I_\alpha\} =$

$(\alpha, \alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Если каждая точка $x \in M$ лежит на одном из этих интервалов, т. е.

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha,$$

то говорят, что система $\{I_\alpha\}$ покрывает множество M . Покрытие называется *конечным*, если множество A конечно, и бесконечным, если A — бесконечное множество.

ЛЕММА (Бореля). *Пусть отрезок $[a, b]$ покрыт бесконечной системой интервалов $\{I_\alpha\}$. Тогда эта система содержит подсистему, состоящую из конечного числа интервалов, также покрывающую $[a, b]$.*

Поясним формулировку: в любом заданном бесконечном покрытии отрезка интервалами «почти все» интервалы этого покрытия являются «длинными» — после их удаления из данного покрытия оставшиеся интервалы (лемма утверждает, что можно обойтись конечным их числом) все еще покрывают весь отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: отрезок $[a, b]$ нельзя покрыть конечной подсистемой интервалов из $\{I_\alpha\}$. Тогда можно построить стягивающуюся последовательность отрезков

$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots,$$

каждый из которых обладает этим же свойством. Действительно, разделив отрезок $[a_1, b_1]$ на две равные части его серединой c , получим два отрезка $[a_1, c]$ и $[c, b_1]$. Хотя бы один из них нельзя покрыть конечной подсистемой интервалов из $\{I_\alpha\}$ (иначе мы смогли бы покрыть конечным числом интервалов и их объединение $[a_1, c] \cup [c, b_1] = [a_1, b_1]$); обозначим таким образом $[a_2, b_2]$. Повторяя рассуждение, получаем нужную последовательность отрезков. Ясно, что каждый последующий отрезок вдвое короче предыдущего; поэтому $b_n - a_n = 2^{-n+1}(b - a) \rightarrow 0$.

По лемме о вложенных отрезках существует точка γ , принадлежащая всем этим отрезкам. Зафиксируем интервал $I_\alpha = (p, q)$, содержащий эту точку. Выберем теперь n настолько большим, что $p < a_n < \gamma < b_n < q$ (это возможно, поскольку $a_n \nearrow \gamma$, $b_n \searrow \gamma$):

$$\begin{array}{ccccccc} & p & a_n & \gamma & b_n & q \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Тогда $[a_n, b_n] \subset (p, q)$, и мы приходим к противоречию: отрезок $[a_n, b_n]$ можно покрыть всего лишь одним интервалом из системы $\{I_\alpha\}$. \square

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, на примерах, что если заменить в формулировке леммы отрезок интервалом или подинтервалом, то утверждение леммы теряет силу.

3.4. Фундаментальные последовательности. Полнота числовой прямой. Последовательность точек $\{a_n\}$ называется *функциональной*, или удовлетворяющей *условию Коши*, если

$$a_n - a_k \rightarrow 0 \quad \text{при } n, k \rightarrow \infty$$

в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что

$$|a_n - a_k| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N \text{ и } k \geq N.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

Действительно, пусть $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. По определению предела существует такое N , что $|a_n - a| < \varepsilon_1$ при $n \geq N$. Тогда при $n \geq N$ и $k \geq N$ имеем

$$|a_n - a_k| = |(a_n - a) + (a - a_k)| \leq |a_n - a| + |a - a_k| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad \square$$

ТЕОРЕМА (о полноте числовой прямой). *Фундаментальная последовательность на числовой прямой всегда имеет конечный предел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность. Она ограничена. Действительно, например, для $\varepsilon = 1$ существует номер N , такой, что

$$|a_n - a_k| < 1 \quad \text{при } n, k \geq N,$$

и, в частности, $|a_n - a_m| < 1$ при $n \geq N$, так что $|a_n| < C = 1 + |a_N|$ при этих n . Отсюда, как мы знаем, следует ограниченность последовательности $\{a_n\}$.

По лемме Больцано–Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$; обозначим ее предел через a . Мы сейчас покажем, что a является пределом самой последовательности a_n .

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. По определению фундаментальной последовательности существует N , такое, что $|a_n - a_m| < \varepsilon_1$ при всех $n, m \geq N$. Выберем

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что интервал $(0, 1)$ не обладает свойством полноты.

3.5. Верхняя и нижняя грани числового множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M — неустое числовое множество, ограниченное сверху. Число b называют его *верхней границей* и пишут

$$b = \sup M \quad \text{или} \quad b = \sup_{x \in M} x,$$

если b есть наименьшее число, такое, что $x \leq b$ для всех x из M .

Иначе говоря, $b = \sup M$, если
1) $x \leq b$ для всех $x \in M$,

2) при любом (сколь угодно малом) $\varepsilon > 0$ на полунитервале $(b - \varepsilon, b]$ найдется точка из M .

Верхняя грань $\sup M$ может принадлежать или не принадлежать множеству M . Например, и отрезок $[a, b]$, и интервал (a, b) имеют своей верхней гранью число b (проверьте это!); это число принадлежит отрезку $[a, b]$ и не принадлежит интервалу (a, b) .

Из определения верхней грани вытекает, что *если верхняя грань существует, то она единственна*.

В самом деле, если предположить, что $b_1 < b_2$ — две различные верхние грани, то из условия 1) для b_1 следует, что $x \leq b_1$ для всех $x \in M$, а из условия 2) для b_2 при $\varepsilon = b_2 - b_1$ получаем, что на полунитервале $(b_2 - \varepsilon, b_2] = (b_1, b_2]$ найдется точка из M . Получается противоречие.

Теорема 1 (о существовании верхней грани). *Для любого непустого ограниченного сверху множества M существует его верхняя грань $\sup M$.*

Доказательство. Мы построим стягивающуюся систему отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что

- (1) $x \leq b_n$ для любого $x \in M$ и
- (2) на $[a_n, b_n]$ есть хотя бы одна точка из M .

Затем мы докажем, что их общая точка и есть искомая верхняя грань.

Так как множество M ограничено сверху, то существует такое число b_1 , что $x \leq b_1$ для любого $x \in M$. Выбрав в качестве a_1 любой элемент множества M , получим первый отрезок $[a_1, b_1]$. Условия (1) и (2) для него, очевидно, выполнены.

Предположим теперь, что отрезок $[a_n, b_n]$, удовлетворяющий условиям (1) и (2), уже построен. Построим следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Для этого разделим отрезок $[a_n, b_n]$ его серединой c на две равные части. Если на отрезке $[c, b_n]$ есть хотя бы одна точка из M , то в качестве $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ выбирайм именно этот отрезок (условия (1) и (2) для него выполнются). Если же на $[c, b_n]$ нет точек из M , то это означает, что $x \leq c$ (и даже $x < c$) для любого $x \in M$ и что на отрезке $[a_n, c]$ обязательно есть хотя бы одна точка $x \in M$ (ведь на $[a_n, b_n] = [a_n, c] \cup [c, b_n]$ такая точка есть); в этом случае в качестве $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ выбирайм $[a_n, c]$.

Длина отрезка $[a_n, b_n]$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ (почему?). Поэтому о заданных отрезках существует точка b , общая для всех $[a_n, b_n]$. Покажем, что $\sup M = b$.

Действительно, если $x \in M$, то, переходя к пределу в неравенстве $x \leq b_n$ (см. (1)), получаем, что $x \leq b$, т. е. условие 1) в определении верхней грани выполнено. Для проверки условия 2) возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим полунитервал $(b - \varepsilon, b]$; поскольку $a_n \rightarrow b$ и $a_n \leq b$, существует n , такое, что $a_n \in (b - \varepsilon, b]$. В силу (2) на $[a_n, b_n]$ есть точка $x \in M$, а так как $x \leq b$, то $x \in [a_n, b] \subset (b - \varepsilon, b]$. Условия 1) и 2) выполнены. \square

Определение 2. Пусть M — непустое числовое множество, ограниченное сверху. Число a называют его *нижней гранью* и пишут

$$a = \inf M \quad \text{или} \quad a = \inf_{x \in M} x,$$

если a есть наибольшее число, такое, что $x \geq a$ для всех x из M . Иначе говорят, $a = \inf M$, если

- 1) $x \geq a$ для всех $x \in M$,
- 2) при любом (сколь угодно малом) $\varepsilon > 0$ на полунитервале $[a, a + \varepsilon)$ найдется точка из M .

Теорема 2 (о существовании нижней грани). *Для любого непустого ограниченного снизу множества M существует его нижняя грань $\inf M$.*

Упражнение 1. Выполните теорему 2 из теоремы 1. Для этого рассмотрите множество $\widehat{M} = \{x : -x \in M\}$.

Замечание. Если $\{a_n\}$ — неубывающая ограниченная сверху последовательность, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n.$$

Точно так же, если $\{a_n\}$ — невозрастающая ограниченная снизу последовательность, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n.$$

Упражнение 2. Проверьте эти утверждения.

Если множество M не является ограниченным сверху, то удобно считать его верхней гранью $+\infty$. Аналогично, если множество M не является ограниченным снизу, то удобно считать его нижней гранью $-\infty$.

Теорема о существовании верхней (нижней) грани тоже относится к утверждениям, справедливым вследствие полноты числовой прямой. В частности, для \mathbb{Q} она не справедлива. Более точно,

если ввести верхнюю грань множества $M \subset \mathbb{Q}$ как рациональное число, удовлетворяющее свойствам 1) и 2), то из ограниченностии сверху множества M не будет вытекать существование такой верхней грани.

[11]

§4. Функции, непрерывные на промежутках. Непрерывность элементарных функций

4.1. Определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Будем называть лежащих строго между a и b , с возможным добавлением точки a , если $-\infty < a$, и точки b , если $b < +\infty$. Таким образом, промежуток $\langle a, b \rangle$ — это отрезок $[a, b]$ (в этом случае a и b — конечные точки), интервал (a, b) (не исключено, что $a = -\infty$, $b = +\infty$) или один из полуинтервалов $(a, b]$, $[a, b)$. Точки x , лежащие строго между a и b , называются *внутренними* точками промежутка $\langle a, b \rangle$; если $-\infty < a$, то a — левый конец; если $b < \infty$, то b — правый конец.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b \rangle$, называется *непрерывной* на нем, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого промежутка и если, кроме того, она непрерывна в точке a справа в случае, когда $a \in \langle a, b \rangle$, и непрерывна в точке b слева в случае, когда $b \in \langle a, b \rangle$.

4.2. Теорема Коши о промежуточном значении.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда каждое число d , лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, является значением функции хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$: $d = f(c)$ (см. рис. 21).

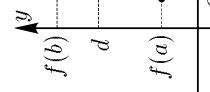


Рис. 21

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем некоторые замечания.

Утверждение теоремы при помощи кванторов \exists и \forall формулируется так (пусть для определенности $f(a) < f(b)$):

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \in [a, b] : \quad f(c) = d$$

(для любого d между $f(a)$ и $f(b)$ существует такое число c из $[a, b]$, что $f(c) = d$). Проверьте себя, правильно ли Вы понимаете и формулируете это утверждение.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в этой теореме существенно. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0, 1] \cup (1, 2], \\ 2 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

не принимает значения 1, а функция

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1], \\ 2 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

вообще не принимает ни одного промежуточного значения между $f(0)$ и $f(1)$ (см. рис. 22 и 23).

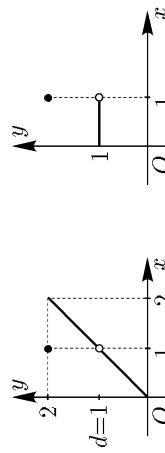


Рис. 22

Рис. 23

Интуитивно утверждение теоремы воспринимается как очевидное. Строгое доказательство подтверждает правильность нашего интуитивного представления о непрерывной на отрезке функции. Это доказательство несложно и поучительно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $f(a) < d < f(b)$.

Построим систему стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$, таких, что $f(a_n) < d < f(b_n)$. Их общая точка и будет искомой точкой c .

Положим $[a_1, b_1] = [a, b]$. Следующий отрезок $[a_2, b_2]$ строим так. Разбиваем $[a_1, b_1]$ на две части точкой c_1 — серединой этого отрезка. Если $f(c_1) = d$, то искомая точка c найдена и доказательство завершено. Если $f(c_1) < d$, то полагаем $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$,

если же $f(c_1) > d$, то полагаем $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. Продолжаем этот процесс, разбивая отрезок $[a_2, b_2]$ пополам, и т.д. Если он не обрывается на некотором шаге ($f(c_n) = d$), то в итоге получаем нужную систему отрезков

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots, \\ f(a_n) < d < f(b_n), \quad b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

По лемме о вложенных отрезках существует общая для всех отрезков $[a_n, b_n]$ точка c , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке c ; поэтому (см. следствие из теоремы в п. 2.14)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

Переходя к пределу в неравенстве $f(a_n) < d$, получаем $f(c) \leq d$; переходя к пределу в неравенстве $f(b_n) > d$, получаем $f(c) \geq d$. Значит $f(c) = d$.

Случай $f(q) > d > f(b)$ разбирается аналогично (впрочем, его можно свести к рассмотренному выше, если рассмотреть уравнение $-f(x) = -d$). \square

Метод нахождения корня уравнения $f(x) = d$, использованный в доказательстве, называется *методом деления отрезков пополам*. В частности, при $d = 0$ это простейший метод поиска корня уравнения

$$F(x) = 0. \quad (1)$$

Ясно, что уравнение $f(x) = d$ сводится к (1), если положить $F(x) = f(x) - d$. Другие методы отыскания корней уравнения (1) будут рассмотрены в дифференциальном исчислении.

Отметим, что уравнение (1) может иметь несколько (или даже бесконечно много) корней на $[a, b]$. Рассмотренный метод позволяет найти один из корней.

Теорема Коши о промежуточном значении — это первая из теорем о глобальных свойствах (т. е. свойствах «в целом») функций, непрерывных на отрезке. Она понадобится уже в следующем пункте. Еще четыре теоремы приведены в следующем пункте и в пунктах 4.3, 4.14 и 4.15.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите при помощи теоремы Коши о промежуточном значении, что если функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$, то множество значений этой функции содержит промежуток $[f(a), +\infty)$.

4.3. Теорема о непрерывной обратной функции. Дадим сначала определение (однозначной) обратной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$y = f(x), \quad (1)$$

— функция с областью определения X и областью значений Y , и пусть формула (1) определяет *единственно однозначное* отображение, или *бихективо*, множества X на множество Y , т.е. для каждого $y \in Y$ существует единственное $x \in X$, такое, что $f(x) = y$. Положим теперь для каждого $y \in Y$

$$x = g(y), \quad (2)$$

если $y = f(x)$. Множество Y является областью определения этой функции, а X — множеством значений. Функция (2) называется *обратной* к (1). Вместо $g(y)$ часто пишут $f^{-1}(y)$ (не путать с $1/f$).

Из приведенного определения вытекает, что функция $y = f(x)$, в свою очередь, также является обратной к функции $x = g(y)$. Поэтому можно говорить о паре взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$.

Функция $y = f(x)$, имеющая обратную, называется *обратимой*.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию

$$y = \frac{2x+3}{3x+2} \quad (3)$$

с областью определения $X = (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, +\infty)$. Для любого $y \neq 2/3$ существует и единственно решение x уравнения (3), которое мы находим, выражая x через y :

$$x = \frac{3-2y}{3y-2}. \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что уравнение $\frac{2x+3}{3x+2} = \frac{2x+3}{3x+2}$ не имеет решения. Таким образом, функция (4) с областью определения $Y = (-\infty, 2/3) \cup (2/3, +\infty)$ является обратной к (3). См. рис. 24.

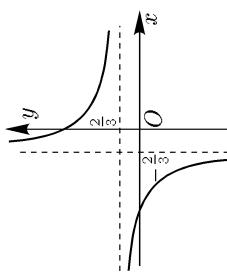


Рис. 24

Простым условием, достаточным для существования обратной функции, является строгая монотонность исходной функции. Действительно, если $f(x)$ возрастает (или убывает), то $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Следовательно, для любого y из области значений функции $f(x)$ существует единственное x , такое, что $f(x) = y$.

Следующая теорема будет иметь многое приложения (в частности, к исследованию обратных тригонометрических функций, функций $\sqrt[n]{x}$ и логарифмической функции).

Теорема (о непрерывной обратной функции). Пусть $y = f(x)$ — строго монотонная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $c = f(a)$, $d = f(b)$. Тогда $f(x)$ имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$, определенную на отрезке $[c, d]$.

Если $f(x)$ возрастает, то $g(y)$ определена на отрезке $[c, d]$ и также возрастает (см. рис. 25). Если $f(x)$ убывает, то $g(y)$ определена на отрезке $[d, c]$ и тоже убывает (см. рис. 26).

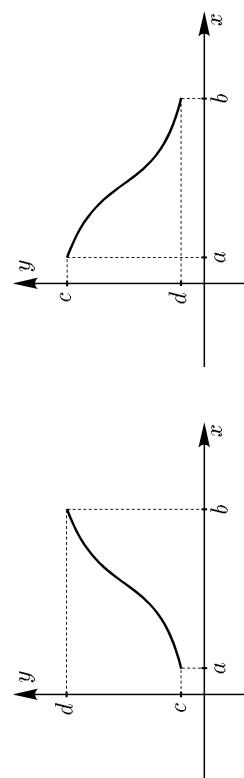


Рис. 25

Доказательство. Пусть для определенности $f(x)$ — возрастающая функция. По теореме Коши о промежуточном значении для любого $y \in [c, d]$ существует x , такое, что $f(x) = y$. Из монотонности функции $f(x)$ вытекает единственность такой точки

x (если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$). Итак, мы показали, что существует функция $x = g(y)$ с областью определения $[c, d]$, обратная к $y = f(x)$.

Проверим, что функция $x = g(y)$ возрастает. Пусть $y_1 < y_2$. Предположим, что $g(y_1) \geq g(y_2)$. Тогда для $x_1 = g(y_1)$ и $x_2 = g(y_2)$ имеем $f(x_1) \geq f(x_2)$, так как $f(x)$ — возрастающая функция. Последнее неравенство противоречит, поскольку $f(x_1) = y_1$, а $f(x_2) = y_2$.

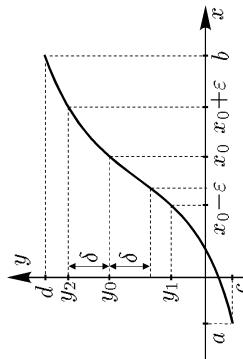


Рис. 27

Докажем непрерывность функции $x = g(y)$ на отрезке $[c, d]$. Сначала рассмотрим внутреннюю точку y_0 отрезка $[c, d]$. Положим $x_0 = g(y_0)$ (см. рис. 27). Ясно, что $x_0 \in (a, b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Мы будем считать, что оно достаточно мало, так что $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$. Положим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Поскольку функция $f(x)$ возрастает, $y_1 < y_0 < y_2$. Положим $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Тогда для любой точки $y \in O_\delta(y_0)$ выполняются неравенства $y_1 < y < y_2$. Эти неравенства в силу возрастания функции $g(y)$ влечут за собой неравенства $g(y_1) < g(y) < g(y_2)$, или, что то же,

$$x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon.$$

Итак, мы показали, что для любого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если $y \in O_\delta(y_0)$, то $g(y) \in O_\varepsilon(g(y_0))$, т.е. $x = g(y)$ непрерывна в точке $y_0 \in (c, d)$.

Аналогично доказывается односторонняя непрерывность функции g в точках c и d . \square

В качестве следствий доказанной теоремы получаются аналогичные утверждения для случая, когда отрезок $[a, b]$ заменяется на интервал или полунитрвал, конечный или бесконечный. Обратная функция тогда тоже будет определена на интервале или полу-

интервале соответственно. Сформулируем несколько таких следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая (или убывающая) непрерывная функция на интервале (a, b) , $c = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $d = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Тогда эта функция имеет обратную функцию $x = g(y)$, определенную на интервале (c, d) (соответственно (d, c)); эта функция также является возрастающей (соответственно убывающей) и непрерывной (см. рис. 28).

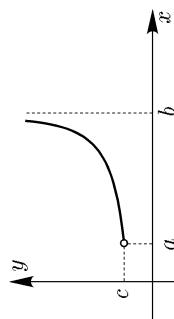


Рис. 28

Здесь функция $y = f(x)$ не обязательно ограничена на (a, b) и один или оба предела c, d могут быть бесконечными (на рис. 28 $d = \infty$).

Поясним, как сформулированное утверждение выводится из теоремы. Пусть $f(x)$ для определенности возрастает на (a, b) . Рассмотрим функцию $f(x)$ на отрезке $[a + \delta, b - \delta]$. По теореме о непрерывной обратной функции на отрезке $[f(a + \delta), f(b - \delta)]$ определена, непрерывна и является возрастающей обратная функция $x = g(y)$. Это означает, что функция $x = g(y)$, обратная к $f(x)$, определена на интервале (c, d) . Действительно, при $\delta \rightarrow +0$ имеем $f(a + \delta) \rightarrow c$ и $f(b - \delta) \rightarrow d$; поэтому для любой точки $y \in (c, d)$ существует такое $\delta > 0$, что число y принадлежит отрезку $[f(a + \delta), f(b - \delta)]$ и, следовательно, входит в область определения обратной функции.

Сформулируем еще одно следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая (или убывающая) непрерывная функция на интервале $(a, +\infty)$, $c = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $d = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Тогда эта функция имеет обратную функцию $x = g(y)$, определенную на интервале (c, d) (соответственно (d, c)); эта функция также является возрастающей (соответственно убывающей) и непрерывной (см. рис. 29).

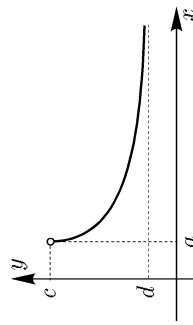


Рис. 29

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Приведите чертеж к следствию 2 для случая убывающей функции $f(x)$ и $c = +\infty$, $d = -\infty$. Выведите утверждение этого следствия из теоремы.

2. Сформулируйте следствие из теоремы в случае, когда функция $y = f(x)$ определена, скажем, на промежутке $(-\infty, b]$.

3. Покажите, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке (a, b) , то условие ее строгой монотонности необходимо для существования обратной функции.

Разумеется, обратимая функция в общем случае не обязана быть монотонной. В частности, функция (3) из примера 1 не является монотонной, но имеет обратную.

ПРИМЕРЫ. 2. Положим на $[0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{на } [0, 1], \\ 3 - x & \text{на } (1, 2]. \end{cases}$$

3. Положим на $[-1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

В обоих случаях функции не монотонны (вторая функция не монотонна ни на каком отрезке) и имеет обратные.

Отметим еще, что на рисунках 25–29 графики прямой и обратной функций совпадают, если обратная функция $x = g(y)$ рассматривается как заданная на множестве Y оси Oy .

Но обычно приходится менять роли буквами x и y и рассматривать обратную функцию как заданную на оси x : $y = g(x)$. Отметим, что ее график получается из графика прямой функции $y = f(x)$ отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (см. рис. 30). Это обстоятельство нужно иметь в виду при чтении следующих пунктов.

Аналогично функция $y = \arccos x$ определяется как обратная функция к функции $y = \cos x$, которая рассматривается на отрезке $[0, \pi]$. Функция $\arccos x$ определена на отрезке $[-1, 1]$, непрерывна и убывает.

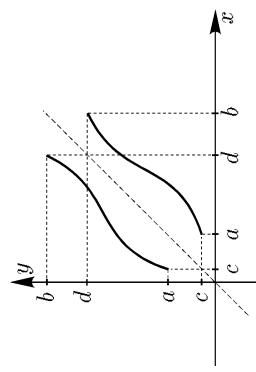


Рис. 30. График обратной функции

4.4. Обратные тригонометрические функции. Чтобы определить функции, обратные к тригонометрическим функциям

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x,$$

нужно каждую из этих функций рассмотреть на максимально большом промежутке, на котором она непрерывна и строго монотонна (см. рис. 7 и 9).

Для функции $\sin x$ принято использовать отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$. На нем $\sin x$ — возрастающая функция, ее значения на концах этого отрезка равны -1 и 1 . Применяя теорему о непрерывной обратной функции, получаем, что на $[-1, 1]$ определена обратная функция, она непрерывна и возрастает. Ее обозначают через $\arcsin x$.¹⁾ График этой функции изображен на рис. 31а. Пунктиром на нем показаны другие значения бесконечнозначной функции $\operatorname{Arcsin} x$; все ее значения получаются, если $\sin x$ рассматривать на всех промежутках монотонности $[-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

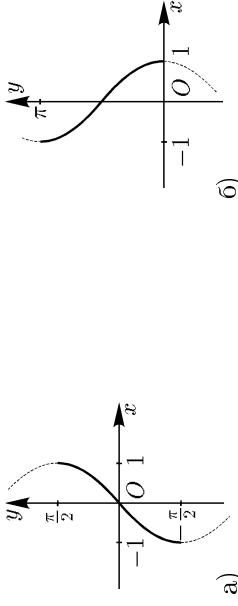


Рис. 31. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$

¹⁾ Подробнее: мы сначала вводим функцию $x = \operatorname{arcsin} y$, а затем заменяем y на x и x на y .

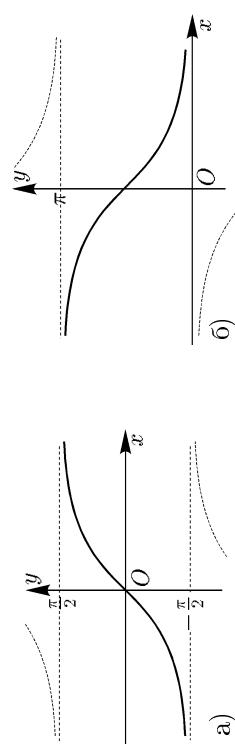


Рис. 32. Функции $y = \arctg x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Функция $\arctg x$ определяется при помощи следствия 1 как обратная к функции $\operatorname{tg} x$, рассматриваемой на $(-\pi/2, \pi/2)$. Функция $\operatorname{arcctg} x$ определена на всей оси и возрастает; ее область значений — интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

Функция $\operatorname{arcctg} x$ определяется как обратная к функции $\operatorname{ctg} x$, рассматриваемой на интервале $(0, \pi)$. Функция $\operatorname{arcctg} x$ определена на всей оси и убывает; ее область значений — интервал $(0, \pi)$.

Графики этих функций изображены на рис. 31–32. Пунктиром показаны другие значения бесконечнозначных функций $\operatorname{Argcos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$.

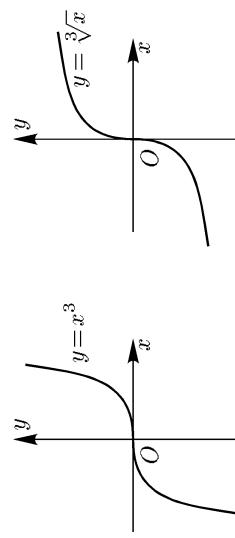


Рис. 33. Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$

4.5. Степенная функция с рациональным показателем. Функция $y = x^n$, где n — нечетное положительное число, непрерывна и возрастает на всей числовой оси; ее область значений — вся числовая ось. Функция $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ определяется как обратная к ней; она определена на всей числовой оси; ее область значений — тоже вся ось (см. рис. 33 для $n = 3$).

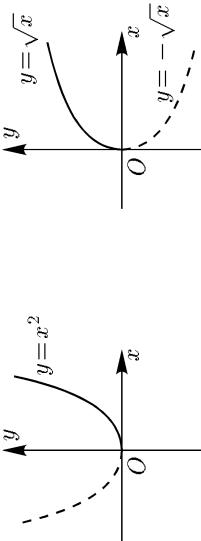


Рис. 34

Функция $y = x^n$, где n — четное положительное число, непрерывна на всей оси, но монотонна только на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. Рассмотрим ее на втором из этих промежутков. На нем она возрастает и имеет область значений $[0, +\infty)$. Определим $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ как обратную функцию; она определена, непрерывна и возрастает на $[0, +\infty)$ и имеет область значений $[0, +\infty)$. См. рис. 34 для $n = 2$; пунктиром на нем показаны графики функции x^2 на $(-\infty, 0]$ и обратной к ней функции $-\sqrt{x}$.

Функция $y = x^{m/n}$, где m, n — натуральные числа, определяется как сложная функция. Ограничимся ее определением для $x \geq 0$. Тогда можно положить $y = (x^m)^{1/n}$ или $y = (x^{1/n})^m$; можно показать, что эти определения эквивалентны. Более того, если p — любое натуральное число, то $y = (x^{mp})^{1/p} = (x^{1/p})^{mp}$ — та же самая функция. Ее непрерывность проверяется при помощи теоремы о непрерывности сложной функции. Она возрастает и имеет область значений $[0, +\infty)$ (см. рис. 35).

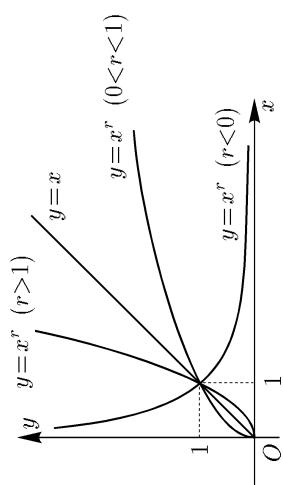


Рис. 35. Степенная функция

Наконец, функция $y = x^{-m/n}$, где m, n — натуральные числа, определяется при $x > 0$ как $1/x^{m/n}$. Это убывающая непрерывная функция с областью значений $(0, +\infty)$ (см. рис. 35).

Итак, мы определили функцию x^r с любым рациональным r при $x \geq 0$, если $r \geq 0$, и при $x > 0$, если $r < 0$.

Для некоторых пар натуральных чисел m, n функцию $x^{m/n}$ можно определить на всей оси, а функцию $x^{-m/n}$ — для всех $x \neq 0$. Например, так обстоит дело, если n нечетно. Подробно на этом не будем останавливаться.

4.6. Показательная функция $y = a^x$. Функция $y = a^x$ ($a > 0$) [1.3]

определяется на всей числовой оси.

Если $a = 1$, то $a^x = 1^x \equiv 1$.

Если $a > 1$, то определение дается следующим образом. При рациональных $x = r$ значение a^r уже определено (см. предыдущий пункт). При этом справедливы следующие утверждения:

- (а) если $r_1 < r_2$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$;
- (б) $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;
- (с) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

Доказательства этих утверждений опираются на свойства степенной функции $y = x^n$ и обратной к ней функции $y = x^{1/n}$. Мы не будем на них останавливаться (см., например, [1]).

Пусть x иррационально и $\{r_n\}$ — возрастающая последовательность рациональных чисел, имеющая предел x (например, последовательность десятично-rationальных приближений к x). Из свойства (а) следует, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ возрастает и ограничена сверху (числом a^r , где r — любое рациональное число, большее x). В силу теоремы Вейерштрасса (п. 1.5) эта последовательность имеет предел, который и принимается за a^x .

Приведенное определение корректно, т. е. не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$. Действительно, пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — две возрастающие последовательности рациональных чисел, такие, что $r'_n > x$ и $r''_n > x$. Перенумеруем заново все числа r'_n и r''_n , составив из них одну возрастающую последовательность $r_{n,1}$



Ясно, что $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — подпоследовательности последовательности $\{r_n\}$ и $r'_n > x$. Последовательность a^{r_n} не убывает,

¹⁾Отметим, что такая нумерация невозможна, если последовательности $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ имеют разные пределы.

ограничена (числом a^r , где $r > x$), а, значит, сходится. Ее подпоследовательности a^{r_n} и $a^{r'_n}$ имеют тот же предел, и тем самым

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n}.$$

При $0 < a < 1$ функция a^x задается формулой

$$(1) \quad a^x = (1/a)^{-x},$$

где $1/a > 1$.

ТЕОРЕМА 1. При $a > 1$ функция a^x непрерывна и возрастает на всей числовой оси. При $0 < a < 1$ функция a^x непрерывна и убывает на всей числовой оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a > 1$. Сначала покажем, что если $x \notin \mathbb{Q}$ и $r \in \mathbb{Q}$, то

$$(2) \quad x < r \implies a^x \leq a^r \quad \text{и} \quad r < x \implies a^r \leq a^x.$$

В самом деле, пусть $r_n \nearrow x$ — возрастающая последовательность. Если $x < r$, то тем более $r_n < x < r$, и, переходя к пределу в неравенстве $a^{r_n} < a^r$, получаем $a^x \leq a^r$. Если $r < x$, то $r < r_n$, начиная с некоторого n_0 . Переходя к пределу в неравенстве $a^r < a^{r_n}$, получаем $a^r \leq a^x$.

Теперь пусть x_1 и x_2 — любые действительные числа, такие, что $x_1 < x_2$. Возьмем два рациональных числа r_1 , r_2 , таких, что

$$x_1 < r_1 < r_2 < x_2.$$

Тогда из (а) и (2) вытекает, что

$$a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}, \quad \text{т.е. } a^{x_1} < a^{x_2},$$

значит, a^x возрастает на всей числовой оси.

Отсюда, в частности, следует, что $a^x > 0$. Действительно, для любого x существует рациональное число r , такое, что $r < x$. По определению рациональной степени $a^r > 0$, значит, $a^x > a^r > 0$.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и из $x_1 < x_2$ вытекает, что

$$a^{x_1} = \frac{1}{(1/a)^{x_1}} > \frac{1}{(1/a)^{x_2}} = a^{x_2},$$

следовательно, a^x убывает на \mathbb{R} . \square

Покажем, что свойство (б) распространяется на все действительные x_1 и x_2 :

$$(3) \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

В самом деле, пусть r_n и r'_n — возрастающие последовательности рациональных чисел, сходящиеся к x_1 и x_2 соответственно. Тогда $r_n + r'_n$ — возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к $x_1 + x_2$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве

$a^{r_n} a^{r'_n} = a^{r_n + r'_n}$, которое справедливо в силу (б), получаем (3) по определению показательной функции.

Доказательство непрерывности функции a^x опирается на следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть $a > 0$. Тогда

$$(4) \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $a > 1$. Положим $\alpha_n = a^{1/n} - 1$ и запишем это равенство в виде $(1 + \alpha_n)^n = a$, где $\alpha_n > 0$. Используя бином Ньютона (см. п. 1.13), при $n > 1$ получаем

$$(1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \dots > 1 + n\alpha_n.$$

Значит, $a > 1 + n\alpha_n$, и поэтому

$$0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\alpha_n \rightarrow 0$, так что $a^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/a)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

При $a = 1$ доказывать нечего. \square

ТЕОРЕМА 2. Функция a^x непрерывна на числовой прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала непрерывность в точке 0. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу леммы $a^{-1/n} \rightarrow 1$ и $a^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$; поэтому существует такое N , что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N} < 1 < a^{1/N} < 1 + \varepsilon.$$

Положим $\delta = 1/N$. Функция a^x в силу теоремы 1 возрастает; поэтому если $|x| < \delta$, т.е. $-\delta < x < \delta$, то

$$a^{-1/N} < a^x < a^{1/N} \text{ и, значит, } 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon,$$

или $|a^x - 1| < \varepsilon$. Непрерывность в точке 0 доказана.

Пусть теперь x_0 — произвольное число на действительной прямой. Тогда, пользуясь тождеством (3) и непрерывностью функции a^x в нуле, получим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} a^0 = a^{x_0},$$

что и требовалось.

Непрерывность функции a^x при $0 < a < 1$ получается из теоремы о непрерывности отношения, поскольку в этом случае $a^x = 1/(1/a)^x$. \square

Свойство (c), разумеется, также переносится на случай всех действительных x_1 и x_2 :

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}. \quad (5)$$

Действительно, пусть сначала $x_2 = r$ — рациональное число. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_1 . Переходя в равенстве $(a^{r_n})^r = a^{r_n r}$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем в силу непрерывности функций $(a^x)^r$ (поясним, что $z = (a^x)^r$ — сложная функция, $y = a^x$ — непрерывная внутренняя, а $z = y^r$ — непрерывная внешняя функция) и a^{rx} тождество $(a^{x_1})^r = a^{rx_1}$. Теперь пусть $\{r'_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_2 . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в тождестве $(a^{x_1})^{r'_n} = a^{r'_n x_1}$, получаем (5).

Отметим, наконец, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= +\infty, & \text{если } a > 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= 0, & \text{если } 0 < a < 1. \end{aligned} \quad (6)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте соотношения (6).

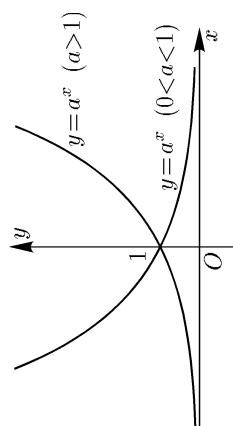


Рис. 36. Показательная функция

Если $a = e$, то иногда вместо e^x пишут $\exp x$; функцию e^x называют также экспоненциальной функцией.

4.7. Логарифмическая функция $y = \log_a x$. Функция $y = \log_a x$ определяется при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ как обратная к показательной функции. Пусть для определенности $a > 1$. Функция

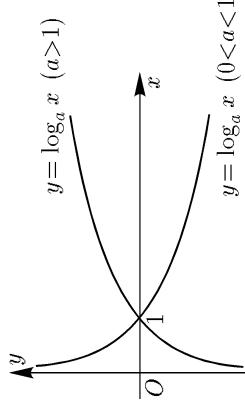


Рис. 37. Логарифмическая функция

При $0 < a < 1$ прямая функция $y = a^x$ и обратная $y = \log_a x$ убывают. См. рис. 37.

Из соотношений (3) и (5) в п. 4.6 следует, что для любых положительных y_1 , y_2 справедливы равенства

$$\begin{aligned} \log_a y_1 y_2 &= \log_a y_1 + \log_a y_2, \\ \log_a \frac{y_1}{y_2} &= y_1 \log_a y_2. \end{aligned}$$

При $a = e$ пишут $\ln x$; это, по определению, натуральный логарифм числа x .

4.8. Общая степенная функция $y = x^\alpha$. Общую степенную функцию x^α с произвольным $\alpha \in \mathbb{R}$ можно определить при $x > 0$ формулой

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \quad (1)$$

Заметим, однако, что соотношение (1) по существу не является определением функции x^α . Произвольная степень произвольного положительного числа уже была определена в п. 4.6. Соответствие (1) выводится из определения натурального логарифма и равенства (5) из п. 4.6:

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Пользуясь формулой (1), нетрудно вывести основные свойства степенной функции. Это непрерывная строго монотонная функция (возрастающая при $\alpha > 0$ и убывающая при $\alpha < 0$). Представление о том, как устроен ее график при разных α , дает рис. 35.

4.9. Гиперболические функции. Введем еще гиперболические функции. Гиперболические косинус и синус определяются равенствами

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (1)$$

гиперболические тангенс и котангенс — равенствами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad (2)$$

(в последнем случае $x \neq 0$). Графики функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ (см. рис. 38) получаются из графиков функций $e^x/2$ и $e^{-x}/2$ сложением и соответственно вычитанием ординат (на рис. 38 графики этих функций и функции $-e^{-x}/2$ указаны пунктиром), а графики $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ (см. рис. 39) получаются из графиков функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ делением одной ординаты на другую.

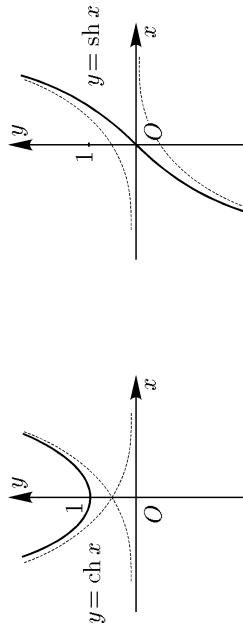
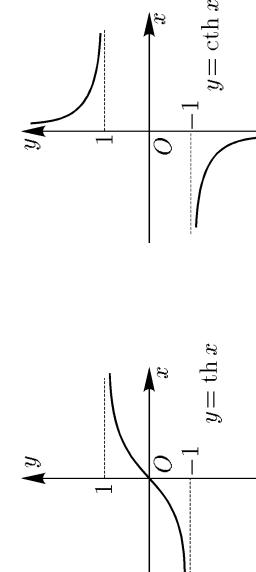


Рис. 38. Гиперболические функции $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{sh} x$



Название «гиперболические функции» связано со следующим обстоятельством. Как легко проверить,

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t \equiv 1. \quad (3)$$

Если положить $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, точка (x, y) при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ пробегает правую ветвь гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. (Для сравнения отметим, что если положить $x = \cos t$, $y = \sin t$, то $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ и при изменении t от 0 до 2π точка (x, y) пробегает окружность $x^2 + y^2 = 1$. С этим связано второе название тригонометрических функций: круговые функции.)

4.10. Элементарные функции. Их непрерывность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следующие функции называются основными элементарными функциями: постоянная, степенная функция x^α , показательная функция a^x и логарифмическая функция $\log_a x$ ($0 < a$, $a \neq 1$), тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $y = f(x)$ называется элементарной, если она получается из основных элементарных функций при помощи конечного набора четырех арифметических операций и операции образования сложной функции.

Например, рациональная функция, $|x| = \sqrt{x^2}$, $e^{\sin x}$ — элементарные функции. Некоторые функции можно было бы и не включать в число основных элементарных, так как они получаются из других при помощи указанных операций (например, $\operatorname{tg} x$ получается делением $\sin x$ на $\cos x$). Но мы не будем отклоняться от традиции.

Как мы видели, если основная элементарная функция определена на некотором промежутке, то она непрерывна на этом промежутке на некоторм промежутке.

В силу теоремы о непрерывности сложной функции справедлива

Теорема (о непрерывности элементарных функций). Если элементарная функция $y = f(x)$ определена на промежутке (a, b) , то она непрерывна на этом промежутке.

Основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, производная, интеграл) рассчитаны на применение к произвольным функциям (точнее, к произвольным «достаточно хорошим» функциям). Но при этом элементарным функциям и в особенности основным элементарным функциям уделяется постоянно внимание.

За пределы класса элементарных функций легко выйти, используя задание функции разными формулами на разных промежутках. Например, функция $f(x)$, равная e^x при $x \geq 0$ и $\sin x$ при

$x < 0$, не является элементарной. Не является элементарной функция Дирихле (см. п. 2.9). Функции, обратные к элементарным, не всегда являются элементарными. Например, известно, что не является элементарной функция $x = f^{-1}(y)$, где $f(x) = x + e^x$ (очевидно, что здесь $f(x)$ — возрастающая и непрерывная на всей числовой оси функция).

4.11. Второй замечательный предел.

ТЕОРЕМА (о втором замечательном пределе). Справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что при $n \leq x < n+1$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n};$$

поэтому в силу монотонности степенной и показательной функций имеем

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (2)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Последовательности

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

имеют пределом число e . Действительно,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \rightarrow e \cdot 1 = e, \\ b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \rightarrow e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Поэтому существует такое N , что при $n \geq N$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |a_n - e| &< \varepsilon & \text{и} & \quad |b_n - e| < \varepsilon, \\ \text{в частности,} \quad e - \varepsilon &< a_n & \text{и} & \quad b_n < e + \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $x \geq N$, а n — наибольшее натуральное число, не превышающее x ; тогда $N \leq n \leq x < n+1$, и в силу (2) и (3) имеем

$$e - \varepsilon < a_n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < b_n < e + \varepsilon.$$

Итак, при $x \geq N$

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon, \quad \text{или} \quad \left|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon. \quad \square$$

В качестве следствия из доказанной теоремы мы выведем следующие важные формулы:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Формула (4) получается при помощи замены переменной $x = -y - 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-y-1}\right)^{-y-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Поясним, что мы фактически воспользовались теоремой 4 о пределе сложной функции (см. п. 2.13), представив функцию $(1 + \frac{1}{x})^x$ как сложную функцию $f(g(x))$, где $f(y) = (1 + \frac{1}{y})^{y+1}$, $g(x) = -x - 1$.

В формуле (5) вычисление односторонних пределов в точке 0 сводится к применению формул (1) или (4) заменой $y = 1/x$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Здесь применяется «односторонний» вариант теоремы 4 о пределе сложной функции: исследуемая функция имеет вид $f(g(x))$, где $g(x) = 1/x$, а $f(y) = (1 + \frac{1}{y})^y$.

Соотношение (6) выводится из формулы (5) при помощи теоремы 2 о пределе сложной функции из п. 2.13:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Здесь исходная функция имеет вид $f(g(x))$, где внутренняя функция $g(x) = (1+x)^{1/x}$ стремится к e при $x \rightarrow 0$, а внешняя функция $f(y) = \ln y$ непрерывна в точке $y = e$.

Формула (7) выводится из (6) при помощи замены $x = \ln(1+y)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

Поясним, что используется теорема 3 о пределе сложной функции из п. 2.13: вычисляется предел функции $f(g(x))$, где внешняя функция $f(y) = \frac{y}{\ln(y+1)}$ не является непрерывной в точке 0, но внутренняя функция $f(x) = e^x - 1$ не обращается в 0 при $x \neq 0$.

4.12. Типы неопределенностей. При нахождении пределов, если ответ не удается указать сразу, как правило, приходится иметь дело с *раскрытием неопределенности*. Мы уже встречались с некоторыми типами неопределенностей; сейчас мы перечислим все типы неопределенностей типа $\frac{0}{0}$.

1) *Несуществование предела* ввиду нахождение предела

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (1)$$

где $f(x) \rightarrow 0$ и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, причем $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{O}(a)$ точки a (или в $O(\pm\infty)$, если

$a = \pm\infty$). [Поясним, что неопределенности нет, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$, а $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, так как тогда применима теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой, а также если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, так как тогда применима теорема о пределе частного.]

Часто такие неопределенности раскрываются при помощи алгебраических преобразований.

ПРИМЕРЫ.

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}. \\ 2. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{(\sqrt{x}-2)^2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x)-3^2}{(x-2)^2} \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{1+2x}+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{x-4} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{1+2x}+3} = \infty \cdot \frac{8}{3} = \infty. \end{aligned}$$

Еще один пример раскрытия неопределенности — доказательство теоремы о первом замечательном пределе в п. 2.5:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Как мы видели на примерах в п. 2.5, эта теорема позволяет раскрыть некоторые другие неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Еще две неопределенности типа $\frac{0}{0}$ раскрываются в соотношениях (6) и (7) в предыдущем пункте.

2) *Несуществование предела* типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Речь идет о нахождении предела (1), когда $|f(x)| \rightarrow \infty$ и $|g(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$.

Такую неопределенность можно свести к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, записав $\frac{f(x)}{g(x)}$ в виде $\frac{1/f(x)}{1/g(x)}$. Но это далеко не всегда ведет к упрощению.

Примером раскрытия неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ является вычисление предела рациональной функции

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

при $x \rightarrow +\infty$. Вынося старшие степени за скобки (считаем, что

a_0 и b_0 отличны от 0), имеем

$$R(x) = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}.$$

Здесь дробь имеет конечный ненулевой предел a_0/b_0 при $x \rightarrow +\infty$, а

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } n > m, \\ 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } n > m, \\ a_0/b_0, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

В первом случае знак перед ∞ совпадает со знаком числа a_0/b_0 .

Кроме того, приведем (пока без доказательства) два следующих важных соотношения:

1. При любом (сколь угодно малом) $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0. \quad (2)$$

2. При любых (сколь угодно больших) $\alpha > 0$ и (сколь угодно малом) $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\varepsilon x}} = 0. \quad (3)$$

Частные случаи этих соотношений для последовательностей оказываются на наших практических занятиях (см. пример 5 занятия 3 и пример 1 занятия 4). На лекциях мы их получим позднее, в дифференциальном исчислении при помощи правила Лопитала. Соотношения (2) и (3) позволяют сравнивать скорости роста важнейших элементарных функций $\ln x$, x^α и $e^{\varepsilon x}$ при $x \rightarrow +\infty$: логарифмическая функция растет медленнее степенной функции, степенная функция — медленнее показательной.

3) Неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Ищется предел произведения $f(x)g(x)$, где $f(x) \rightarrow 0$, $|g(x)| \rightarrow \infty$.

Такую неопределенность можно свести к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, записывая $f(x)g(x)$ в виде

$$\frac{f(x)}{1} \quad \text{или} \quad \frac{g(x)}{1}$$

(в последнем случае предполагается, что в подходящей окрестности $f(x) \neq 0$).

ПРИМЕР. При любом (сколь угодно малом) $\alpha > 0$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x = 0.} \quad (4)$$

Это важное соотношение получается из (2), если воспользоваться заменой $x = 1/y$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^\alpha} \ln \frac{1}{y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y^\alpha} = 0.$$

Соотношение (4) позволяет оценить скорость стремления $\ln x$ к $-\infty$ при $x \rightarrow +0$ (как очень медленную).

4) Неопределенность типа $\infty - \infty$.

Ищется предел разности $f(x) - g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к бесконечности одного знака.

Такую неопределенность иногда удается раскрыть, преобразуя ее в неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

ПРИМЕР.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{1}{\sin 3x} - \frac{1}{\sin 5x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 3x \sin 5x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x \cos 4x}{\sin 3x \sin 5x} \\ &= \frac{2}{15} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{15} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{x} = \pm\infty. \end{aligned}$$

5) Неопределенность типа 1^∞ .

Ищется предел выражения $f(x)^{g(x)}$, где $f(x) \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow \infty$.

Здесь $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, причем $\ln f(x) \rightarrow 0$, так что в показателе мы имеем неопределенность типа $\infty \cdot 0$.

6, 7) *Неопределенности типа 0⁰ и ∞^0 .*

Ищется предел выражения $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, где $g(x) \rightarrow 0$, а $f(x)$ стремится либо к 0, либо к ∞ . В обоих случаях $\ln f(x)$ — бесконечно большая функция и мы имеем неопределенность типа $0 \cdot \infty$ в показателе экспоненты.

Неопределенности типа 5)–7) раскрываются при помощи логарифмирования или перевода в показатель (с использованием теоремы о пределе сложной функции).

ПРИМЕРЫ. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\sin x \ln x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x} = e^0 = 1$.

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом и в обоих примерах воспользовались формулой (4).

Отметим также, что к раскрытию неопределенности типа 1^∞ можно отнести доказательство теоремы о втором замечательном пределе в предыдущем пункте

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

и первых двух следствий из нее.

Отметим еще, что выражение $f(x)^{g(x)}$, где $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \pm\infty$, неопределенностью не является. В этом случае в показателе экспоненты $e^{g(x) \ln f(x)}$ имеем $\ln f(x) \rightarrow -\infty$ и, следовательно, весь показатель стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. В итоге имеем $f(x)^{g(x)} \rightarrow +\infty$ или $f(x)^{g(x)} \rightarrow 0$.

4.13. Еще раз о символах o и O . Эквивалентные функции. В применении к функциям (бесконечно малым или бесконечно большим) можно, как в применении к последовательностям, пользоваться символами o и O . Запись

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \quad (1)$$

означает, что $f(x) = g(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$. В частности, запись

$$f(x) = o(1) \quad (x \rightarrow a) \quad (2)$$

означает, что $f(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$. Запись

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \quad (3)$$

означает, что $f(x) = g(x)h(x)$, где $h(x) \rightarrow 0$ — ограниченная функция в некоторой окрестности $O(a)$ или проколотой окрестности $\dot{O}(a)$.

В частности, запись

$$f(x) = O(1) \quad (x \rightarrow a) \quad (4)$$

означает, что $f(x)$ — ограниченная функция в некоторой окрестности $O(a)$ или $\dot{O}(a)$.

Отметим, что в случае, когда $g(x) \neq 0$ в $\dot{O}(a)$ ($O(\pm\infty)$ при $a = \pm\infty$), мы имеем $f(x) = o(g(x))$, если $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$, и $f(x) = O(g(x))$, если функция $f(x)/g(x)$ ограничена в $\dot{O}(a)$ ($O(\pm\infty)$).

Например, соотношения (2)–(4) из п. 4.12 можно записать так: при $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (5)$$

$$x^\alpha = o(e^{\varepsilon x}) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (6)$$

$$x^\alpha \ln x = o(1) \quad (x \rightarrow +0). \quad (7)$$

При вычислении пределов часто бывает полезно пользоваться понятием эквивалентности функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в $\dot{O}(a)$, называются эквивалентными при $x \rightarrow a$ ($-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$), если

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)) \quad (x \rightarrow a).$$

Иначе говоря, функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \rightarrow a$, если $f(x) = g(x)u(x)$, где $u(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow a$. Это записывается так:

В частности, если $g(x) \neq 0$ в $\dot{O}(a)$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда их отношение стремится к единице при $x \rightarrow a$. Например,

$$\sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad (9)$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad (10)$$

$$e^x - 1 \sim x \quad (x \rightarrow 0). \quad (11)$$

(См. теорему из п. 2.5 и пример 1 после нее, а также формулы (6) и (7) из п. 4.11.)

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношение \sim обладает обычными свойствами эквивалентности:

- a) $f(x) \sim f(x)$;
- b) $f(x) \sim g(x) \implies g(x) \sim f(x)$;
- c) $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x) \implies f(x) \sim h(x)$.

Свойство а) очевидно. Утверждение б) вытекает из того, что $1/(1+o(1)) = o(1)$ (если $u(x) \rightarrow 1$, то $1/u(x) \rightarrow 1$). Утверждение с) следует из соотношения $(1+o(1))(1+o(1)) = 1 + o(1)$ (если две функции стремятся к 1, то их произведение также стремится к 1). Проверьте это самостоятельно.

Из утверждений (8)–(11) вытекают следующие полезные обобщения: пусть $\alpha(x) — бесконечно малая при x \rightarrow a$ функция, тогда

$$\begin{aligned} \sin \alpha(x) &\sim \alpha(x) & (x \rightarrow a), & (8') \\ \operatorname{tg} \alpha(x) &\sim \alpha(x) & (x \rightarrow a), & (9') \\ \ln(1 + \alpha(x)) &\sim \alpha(x) & (x \rightarrow a), & (10') \\ e^{\alpha(x)} - 1 &\sim \alpha(x) & (x \rightarrow a). & (11') \end{aligned}$$

Действительно, если $f(t) \sim g(t)$ при $t \rightarrow 0$, то, по определению, $f(t) = g(t)u(t)$, где $u(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$. Доопределим функцию $u(t)$ в точке 0 значением 1. Теперь функция $u(t)$ непрерывна в точке 0. Замена $t = \alpha(x)$ приводит к равенству $f(\alpha(x)) = g(\alpha(x))u(\alpha(x))$, где $u(\alpha(x)) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow a$ в силу теоремы 2 о пределе сложной функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ ($x \rightarrow a$), то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, & (12) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x)g_1(x). \end{aligned}$$

Действительно,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)(1+o(1))}{g_1(x)(1+o(1))} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \frac{1+o(1)}{1+o(1)},$$

где отношение $(1+o(1))/(1+o(1))$ справа стремится к 1 при $x \rightarrow a$ (этот дробь нельзя сократить: в числителе и знаменателе стоят различные функции). Второе из соотношений (12) доказывается аналогично, оно вытекает из того, что $(1+o(1))(1+o(1)) \rightarrow 1$.

Этот прием помогает упрощать выкладки (ср. с примером в предыдущем пункте):

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sin x \cos 4x}{\sin 3x \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x \cos 4x}{3x \cdot 5x} = \pm \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полезно отметить, что $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow a$) тогда и только тогда, когда

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow a).$$

Действительно, по определению эквивалентных функций

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow a).$$

Кроме того, по определению функции $o(g(x))$ имеем

$$o(g(x)) = g(x)o(1). \quad \square$$

Например, теорему о первом замечательном пределе можно записать в виде

$$\boxed{\sin x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0).} \quad (13)$$

В п. 2.5 был приведен пример 2, из которого следует, что

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).} \quad (14)$$

Соотношение (6) из п. 4.11 можно переписать в виде

$$\boxed{\ln(1+x) = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0),} \quad (15)$$

соотношение (7) из этого же пункта — в виде

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \rightarrow 0).} \quad (16)$$

Эти четыре формулы выявляют *асимптотику* (поведение) левых частей при $x \rightarrow 0$. Формулы такого типа называются *асимптотическими*.

Соотношения (13)–(16) понадобятся в дифференциальном исчислении при выводе формул для производных тригонометрических функций, $\ln x$ и e^x . Далее эти приближенные формулы будут существенно уточнены в разделе «Формула Тейлора».

4.14. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке. В этом пункте мы возвращаемся к свойствам функций, непрерывных на отрезке, см. п. 4.2.

ТЕОРЕМА 1 (1-я теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция не ограничена, скажем, сверху. Тогда для любого натурального n существует точка $x_n \in [a, b]$, такая, что $f(x_n) \geq n$, и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty.$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leq x_n \leq b$. По лемме Больцано–Вейерштрасса (см. п. 3.2) эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Ясно, что ее предел c лежит на отрезке $[a, b]$. Последовательность значений функции $\{f(x_{n_k})\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f(x_n)\}$, и, следовательно, имеет тот же предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = +\infty.$$

Однако функция $f(x)$ непрерывна в точке c , и в силу следствия из теоремы в п. 2.14 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c) \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Полученное противоречие показывает, что функция $f(x)$ ограничена сверху.

Аналогично доказывается, что $f(x)$ ограничена снизу. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отрезок в этой теореме нельзя заменить интервалом или полуинтервалом (конечным, бесконечным). Например, функция $y = 1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не является ограниченной на нем (см. рис. 12).

ТЕОРЕМА 2 (2-я теорема Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на нем нижней и верхней границ своих значений, т. е. существует такое точки c_1 и c_2 на $[a, b]$, что (см. рис. 40)*

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \quad \text{для всех } x \in [a, b]. \quad (1)$$

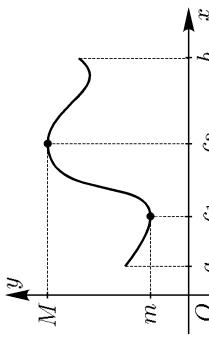


Рис. 40

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ограничено сверху по 1-й теореме Вейерштрасса. Значит, существует верхняя грань этого множества (см. п. 3.5)

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x). \quad (2)$$

По определению верхней грани,

$$f(x) \leq M \quad \text{для всех } x \in [a, b] \quad (2)$$

и для любого n существует точка $x_n \in [a, b]$, такая, что

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M. \quad (3)$$

По лемме Больцано–Вейерштрасса последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Ее предел мы обозначим через c_2 . Из (3) вытекает, что $M - 1/n_k < f(x_{n_k}) \leq M$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в этих неравенствах и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$ в точке c_2 , получаем

$$f(c_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M,$$

т. е. верхняя грань достигается в точке c_2 . Аналогично доказывается существование точки c_1 , в которой достигается нижняя грань. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этой теореме также нельзя заменить отрезок интервалом или полуинтервалом. Например, функция $y = x$ непрерывна на интервале $(1, 2)$, но не достигает на нем нижней и верхней граней своих значений на этом интервале, равных соответственно 1 и 2 (см. рис. 41).

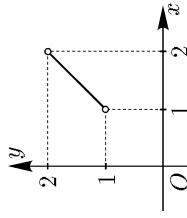


Рис. 41

Разумеется, если задана непрерывная функция на интервале, то не исключено, что она ограничена на нем и достигает нижней и верхней границ своих значений на этом интервале. Например, так обстоит дело с функцией $\sin x$ на $(0, 2\pi)$, $[0, 2\pi]$ на всей оси.

Отметим также, что точка, в которой функция принимает свое максимальное (или минимальное) значение на отрезке, не обязательно единственна. Приведите соответствующие примеры.

Упражнение 1. Приведите примеры функций на отрезке: 1) не ограниченной на нем; 2) ограниченной, но не достигающей верхней и нижней границ своих значений на этом отрезке. Это, конечно, должны быть функции, не являющиеся непрерывными на отрезке.

Из 2-й теоремы Вейерштрасса и теоремы Коши о промежуточном значении (пп. 4.2) вытекает

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Тогда множество значений этой функции на $[a, b]$ есть отрезок $[m, M]$.

Действительно, по 2-й теореме Вейерштрасса на отрезке $[a, b]$ есть точки c_1 и c_2 , такие, что $f(c_1) = m$ и $f(c_2) = M$. В силу теоремы Коши, любое число между $f(c_1)$ и $f(c_2)$ является значением функции f , хотя бы в одной точке между c_1 и c_2 . Кроме того, $m \leq f(x) \leq M$ при $x \in [a, b]$; поэтому вне отрезка $[m, M]$ значений у функции f нет.

Это важное следствие обобщает теорему Коши.

Упражнение 2. Приведите примеры непрерывных функций на интервале с множеством значений, являющимся 1) интервалом, 2) отрезком.

16

4.15. Равномерная непрерывность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке (a, b) . Она называется *равномерно непрерывной* на этом промежутке, если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x_1, x_2 \in (a, b)$

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(т.е. для всех точек из промежутка, отстоящих друг от друга менее, чем на δ , значения функции f в этих точках отличаются менее, чем на ε).

Очевидно, что из равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) следует ее непрерывность на этом промежутке. Отметим, что число δ в определении равномерной непрерывности зависит *только* от ε и «годится» для любой точки x_1 (и любой точки x_2).

ПРИМЕРЫ. 1. Функция $y = ax + b$ равномерно непрерывна на всей оси (при $a \neq 0$ можно взять $\delta = \varepsilon/|a|$).

2. Функция $\sin x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси в силу неравенства (6) из п. 2.2 (можно взять $\delta = \varepsilon$).

3. Функция $\cos x$ также равномерно непрерывна на всей числовой оси (для $\cos x$ справедливо неравенство, аналогичное неравенству (6) из п. 2.2, и вновь можно взять $\delta = \varepsilon$).

ТЕОРЕМА (Кантора). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она равномерно непрерывна на ч.м.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. При помощи кванторов это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Допустим, что $f(x)$ не равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

В частности, для $\delta = 1/n$ существуют x_n и x'_n , такие, что

$$|x_n - x'_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon. \quad (2)$$

По лемме Больцано–Вейерштрасса из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Для нее в силу (2) имеем

$$|x_{n_k} - x'_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k}, \quad |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = c$. Из первого из неравенств (3) следует, что $x_{n_k} - x'_{n_k} \rightarrow 0$; поэтому и $x'_{n_k} \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Из непрерывности функции $f(x)$ в точке c следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(c)$$

и, значит, $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Но это противоречит второму из неравенств (3). \square

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Для интервала или полунабора аналого этой теоремы нет. Например, функция $y = 1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не равномерно непрерывна на нем.

Действительно, запишем, как в (1), отрицание равномерной непрерывности этой функции и проверим его:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in (0, 1] : \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \geq \varepsilon.$$

В данном примере годится любое ε . Если, скажем, зафиксируем $\varepsilon = 1$ и для любого $0 < \delta \leq 1$ взять $x_1 = \delta/2$, $x_2 = \delta$, то $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$, но

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{2}{\delta} \geq 2 \geq \varepsilon.$$

Обратите в этом примере внимание на то, что из равномерной непрерывности на всех отрезках $[\frac{1}{n}, 1]$ не следует равномерная непрерывность на их объединении $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$.

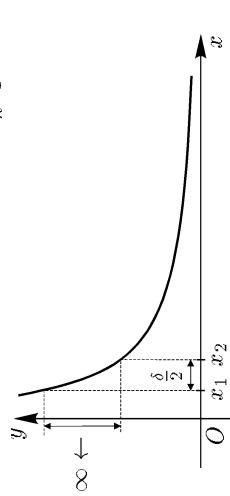


Рис. 42

2. Геометрически отсутствие равномерной непрерывности связано с наличием «сколь угодно крутых» участков графика.¹⁾ Если в только что рассмотренном примере фиксировать $\delta > 0$ и взять $x_2 = x_1 + \delta/2$, то $|x_1 - x_2| < \delta$, но $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \rightarrow \infty$ при $x_1 \rightarrow +0$ (см. рис. 42).

3. Не следует, однако, думать, что отсутствие равномерной непрерывности непременно связано с неограниченностью функции. Например, функция $\sin(1/x)$ ограничена и непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не равномерно непрерывна на нем. Действительно, пусть

$$x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \quad \text{и} \quad x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(n+1)}.$$

Ясно, что $x'_n \rightarrow 0$, $x''_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; поэтому $|x'_n - x''_n| \rightarrow 0$. Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ можно найти такое n , что $|x'_n - x''_n| < \delta$. Однако $|\sin(1/x'_n) - \sin(1/x''_n)| = 2$ при любом n .

4. Как легко понять, из равномерной непрерывности на промежутке $\langle a, b \rangle$ следует равномерная непрерывность на любом меньшем промежутке $\langle a_1, b_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Поэтому если, например, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на полуинтервалах $(a, b]$, $[a, b)$, интервале (a, b) и вообще на любом промежутке $\langle a_1, b_1 \rangle \subseteq [a, b]$. Аналогично, если $f(x)$ непрерывна, скажем, на всей оси, то она равномерно непрерывна на любом конечном промежутке $\langle a, b \rangle$ (так как можно добавить концы a, b и применить теорему Кантора).

УПРАЖНЕНИЯ. 1. Проверьте равномерную непрерывность функции $1/x$ на $[a, \infty)$ при любом $a > 0$.

2. Проверьте, что функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на любом конечном промежутке, но не является равномерно непрерывной на бесконечных промежутках, например, на всей оси.

3. Пусть $f(x)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$. Докажите, что $f(x)$ равномерно непрерывна на всей оси.

4. Проверьте, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$, то она равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

¹⁾ Впрочем, такие участки могут быть и у равномерно непрерывных функций. Например, функция $y = \sqrt[3]{x}$ в силу теоремы Кантора равномерно непрерывна на любом отрезке.

4.16. Параметрическое задание кривых на плоскости и функций. Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (1)$$

— две функции, заданные на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$ оси t ; будем считать их непрерывными. Если на плоскости выбрана декартова система координат (x, y) , то уравнения (1) определяют отображение промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle$ на плоскость; это отображение называется *кривой, или путем*. Переменная t называется *параметром* вдоль этой кривой; говорят, что уравнения (1) *задают кривую параметрически*. Часто кривой также называют образ упомянутого отображения, т. е. соответствующее множество точек на плоскости.

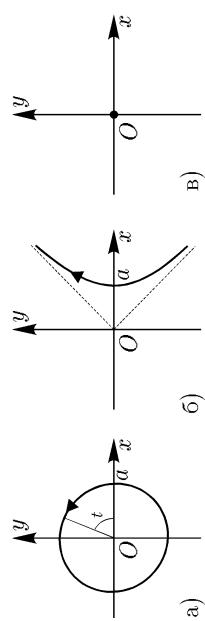


Рис. 43

Примеры. 1. $x = a \cos t, y = a \sin t$ ($a > 0$). Это уравнения окружности радиуса a с центром в точке $(0, 0)$, если t пробегает полупротиволежащий угол $[0, 2\pi]$; при этом t — полярный угол (см. рис. 43а). Если t пробегает, скажем, полуинтервал длины 4π , то получается окружность, которую точка (x, y) пробегает дважды.

2. $x = a \cosh t, y = a \sinh t$ ($a > 0, -\infty < t < \infty$). Здесь получается правая ветвь равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ (см. рис. 43б).

3. $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ ($\alpha < t < \beta$). Здесь кривая сводится к одной точке (вырождается в точку) (см. рис. 43в).

Стрелкой на рис. 43а), 43б) указано направление обхода кривой, отвечающее росту t .

4. Положим

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0, -\infty < t < \infty). \quad (2)$$

Это так называемая *циклоиды* (см. рис. 44б) — траектория точки, закрепленной на окружности радиуса a , которая катится по оси

Ox вправо с ростом t без скольжения. Формулы (2) можно вывести из чертежа на рис. 44а. Значению $t = 0$ отвечает положение отмеченной точки в начале координат; когда центр окружности O' сдвигается вправо на at , радиус, направленный из центра в отмеченную точку, поворачивается на угол t . Таким образом, центр окружности O' движется по прямой $x = at$, $y = a$. Отмеченная точка на окружности в системе координат $x'O'y'$ описывает окружность $x' = -a \sin t, y' = -a \cos t$. Движение точки в неподвижной системе координат — суперпозиция этих движений (см. (2)). Когда t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, отмеченная точка делает полный оборот вокруг движущегося центра и получается одна арка циклоиды (см. рис. 44б).

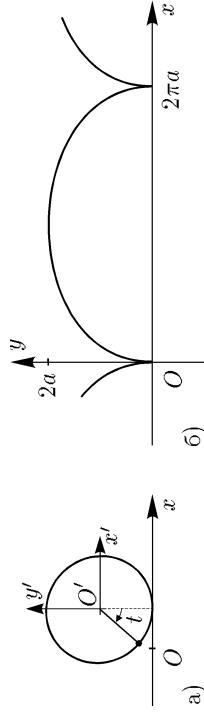


Рис. 44

Вернемся к общему случаю и предположим теперь, что функция $x = x(t)$ строго монотонна на $\langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда она, по теореме о непрерывной обратной функции (см. п. 4.3), имеет непрерывную обратную $t = t(x)$, определенную на соответствующем промежутке $\langle a, b \rangle$. Если подставить $t = t(x)$ в формулу $y = y(t)$, получим функцию

$$y = f(x) = y(t(x)) \quad (x \in \langle a, b \rangle), \quad (3)$$

непрерывную на $\langle a, b \rangle$ по теореме о непрерывной сложной функции. Принято говорить, что уравнения (1) задают в этом случае *функцию (3) параметрически*. Соответствующая кривая будет в этом случае графиком функции (3). В частности, это означает, что кривая однозначно проектируется на ось Ox .

В примере 1 мы получим параметрически заданную функцию, если $\langle \alpha, \beta \rangle$ совпадает с отрезком вида $[\pi k, \pi(k+1)]$, где k — целое число, или с частью такого отрезка. Например, если t пробегает отрезок $[0, \pi]$ или $[-\pi, 0]$, то получается функция, график которой

рой — верхняя или нижняя полуокружность; конечно, эти функции можно задать явными формулами

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (|x| \leq a).$$

Аналогично в примере 2 получаются параметрически заданные функции, если t пробегает луч $[0, \infty)$ или луч $(-\infty, 0]$. Их можно задать явными формулами

$$y = \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{x^2 - a^2} \quad (|x| \geq a).$$

В примере 3 получается функция, заданная лишь в одной точке: $y(0) = 0$. А в примере 4, как можно показать, снова получается параметрически заданная функция, так как функция $x(t) = t - \sin t$ является возрастающей (это будет показано в дифференциальном исчислении). График этой функции $y = f(x)$ — циклоида. Теперь обратим внимание на то, что хотя $x(t)$ и $y(t)$ в последнем примере — элементарные функции, известно, что функция $y = f(x)$ не является элементарной. Более того, известно, что функция $t = t(x)$ также не является элементарной (решить уравнение $x = at - a \sin t$ относительно t в элементарных функциях невозможно).

Таким образом, мы получаем возможность записи через элементарные функции ($x = x(t)$, $y = y(t)$) некоторых функций $y = f(x)$, не являющихся элементарными.

4.17. Комплекснозначные функции. Рассмотрим функцию вида

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad (1)$$

где $u(x)$, $v(x)$ — функции с действительными (вещественными) значениями, заданные на некотором промежутке. Функции $u(x)$ и $v(x)$ называются соответственно *вещественной* (вещественной) и *мнимой частью* функции $f(x)$. Это записывается так:

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad v(x) = \operatorname{Im} f(x). \quad (2)$$

Например, в случае функции $f(x) = 1 + ix$ мы имеем $\operatorname{Re} f(x) = 1$, $\operatorname{Im} f(x) = x$.

Простейший способ распространения на комплекснозначные функции понятия предела состоит в следующем. Полагаем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) + i \lim_{x \rightarrow a} v(x). \quad (3)$$

Подробнее: скажем, что $f(x)$ имеет предел $w_0 = u_0 + iv_0$ при $x \rightarrow a$, если $u(x)$ и $v(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$, равные соответственно u_0 и v_0 .

Это определение эквивалентно такому определению:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w_0,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - w_0| < \varepsilon$ при $x \in O_\delta(a)$.

В самом деле, по определению модуля комплексного числа

$$|f(x) - w_0| = \sqrt{(u(x) - u_0)^2 + (v(x) - v_0)^2}.$$

Поэтому, если $u(x) \rightarrow u_0$ и $v(x) \rightarrow v_0$ при $x \rightarrow a$, то $|f(x) - w_0| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Кроме того, $|u(x) - u_0| \leq |f(x) - w_0| \leq |f(x) - u_0|$, следовательно, если $|f(x) - u_0| \rightarrow 0$, то тем более $|u(x) - u_0| \rightarrow 0$ и $|v(x) - v_0| \rightarrow 0$.

Аналогично определяются пределы функции при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, односторонние пределы и предел последовательности комплексных чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (4)$$

Теоремы об арифметических действиях с пределами легко переносятся на комплекснозначные функции и последовательности.

Определением (3) уже dictуется следующее определение непрерывности: функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если ее вещественная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ непрерывны в этой точке. Это равносильно соотношению

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Аналогично определяется односторонняя непрерывность

Легко проверить, что если комплекснозначные функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a , то в этой точке непрерывны функции $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ (c_1 , c_2 — любые комплексные числа), $f(x)g(x)$ и (при условии $g(a) \neq 0$) $f(x)/g(x)$.

ПРИМЕР. Функция e^{zx} с комплексным $z = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) определяется следующим образом:

$$e^{zx} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x). \quad (5)$$

Это определение согласуется с формулой

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}), \quad (6)$$

предложенной Эйлером в 1742 г., и продиктовано двумя обстоятельствами: 1) при вещественных α функция (5) превращается в «старую» (вещественную) экспоненту; 2) при любых комплексных z_1 и z_2 справедливо основное свойство экспоненты:

$$e^{z_1} e^{z_2} x = e^{(z_1+z_2)x}. \quad (7)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что функция $f(x) = e^{zx}$ непрерывна при любом комплексном z , и проверьте соотношение (7).

Литература

- [1] С. Н. Никольский, Курс математического анализа, т. 1, Наука, 1973.
- [2] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Функции одного переменного, Наука, 1969.
- [3] В. А. Зорич, Математический анализ, т. 1, Наука, 1981.
- [4] У. Рудин, Основы математического анализа, Мир, 1966.

Предисловие к упражнениям

При работе над этой частью книги перед разбором очередного занятия мы рекомендуем проштудировать соответствующий лекционный материал. Каждому занятию указаны номера используемых лекций. Занятия включают разбор лекционных «теоретических» задач (в лекциях и здесь они называются «упражнениями»), которые иногда являются просто пояснением к теоретическому материалу. Этих пояснений больше, чем обычно бывает на занятиях со студентами дневного отделения, которые имеют возможность продумать и понять определения и приемы доказательств в процессе подготовки и сдачи коллоквиумов. С этим связана некоторая неравномерность распределения материала по занятиям.

Однако главная цель на практических занятиях состоит в том, чтобы научиться грамотно выговаривать пределы функций и использовать эти вычисления для схематического построения графиков, пока — без применения средств дифференциального исчисления. Для будущего прикладного математика чрезвычайно важна аналитическая культура, которая закладывается при раскрытии некоторых функций и простейших асимптотических формул для них — определенности с использованием эквивалентностей элементарных функций в дальнейшем строится дифференциальное исчисление для этих функций. В предлагаемом тексте разбираются многочисленные «примеры» (обычно типовые) и ставятся «задачи» для самостоятельного решения. Последние снабжены ответами (а иногда и нашими указаниями), которые приводятся в конце книги. Страйтесь как можно больше делать самостоятельно, в частности, полезно сначала постараться справиться с типовым примером и только после этого смотреть соответствующий текст. Количества задач, которые надо решить самостоятельно, дозировано, их надо стараться решить все. При недостатке времени можно (хотя и нежелательно) пропускать примеры, отмеченные звездочкой.

Ссылка на упражнение 1.14.3 из лекций означает, что имеется в виду упражнение 3 из п. 1.14. Задачи, отмеченные буквой «Д», и многие другие задачи, разбираемые в примерах, взяты из известного задачника Б. П. Демидовича, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, стереотипное изд., изд-во «Наука». Для удобства читателя мы приводим нужные задачи из этого задачника в конце книги.

Занятие 1

Элементарные методы построения графиков функций

Это занятие строится на основе «школьного» материала. Цель состоит в повторении простейших приемов построения графиков функций; проработка этих приемов на лекциях не предполагается. Напомним (см. п. 1.2), что числовая функция f — это правило, согласно которому каждому числу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное число y . В этом случае говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X , и пишут $y = f(x)$, $x \in X$.

Множество Y всех значений y , для каждого из которых существует хотя бы одно число $x \in X$, такое, что $y = f(x)$, называется областью значений или областью изменения функции.

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана явно, то функция считается заданной на ее естественной области определения, т. е. на множестве всех тех x , для которых имеет смысл упомянутое правило.

ПРИМЕР 1. Найти область определения функций:

$$\text{а) } y = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg}(2-x);$$

$$\text{в) } y = \sqrt{\ln \sin x}.$$

Рис. 45. $y = |x|$ Рис. 46. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

3. $y = x^2$ (рис. 34);
4. $y = \cos x$ (рис. 7);
5. $y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (рис. 38; определение числа e см. в п. 1.14);

6. $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $X = \{x : |x| \geqslant 1\}$ (рис. 46). На рис. 46 пунктиром изображен график функции $y = x^2 - 1$. Эта функция неотрицательна при $|x| \geqslant 1$; поэтому именно при $x \geqslant 1$ существует квадратный корень из $x^2 - 1$. График при $x \geqslant 1$ строим, извлекая квадратный корень из значений y , изображенных пунктиром.

ПРИМЕР 7. Построить график функции $y = \frac{1}{1-x^2}$.

РЕШЕНИЕ. Область определения: $X = \{x : x \neq \pm 1\}$; функция четная.

Заметим, что область значений Y последней функции состоит из одной точки 0.

Четные и нечетные функции. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X , называется *четной*, если

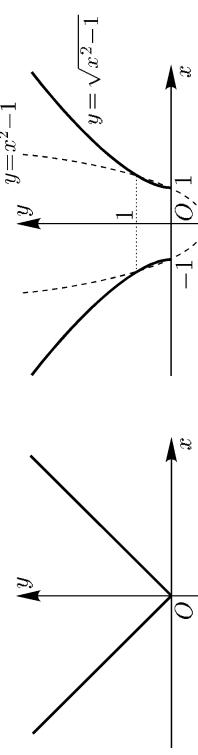
- 1) множество X симметрично относительно начала координат, т.е. таково, что если $x \in X$, то также и $-x \in X$;
- 2) для любого $x \in X$

$$f(x) = f(-x).$$

Из определения следует, что график четной функции симметричен относительно оси Oy . Поэтому сначала можно построить такой график при $x > 0$, а затем использовать симметрию.

Приведем примеры четных функций:

$$2. y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 45});$$

Рис. 45. $y = |x|$ Рис. 46. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

3. $y = x^2$ (рис. 34);
4. $y = \cos x$ (рис. 7);
5. $y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (рис. 38; определение числа e см. в п. 1.14);

6. $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $X = \{x : |x| \geqslant 1\}$ (рис. 46). На рис. 46 пунктиром изображен график функции $y = x^2 - 1$. Эта функция неотрицательна при $|x| \geqslant 1$; поэтому именно при $x \geqslant 1$ существует квадратный корень из $x^2 - 1$. График при $x \geqslant 1$ строим, извлекая квадратный корень из значений y , изображенных пунктиром.

ПРИМЕР 7. Построить график функции $y = \frac{1}{1-x^2}$.

РЕШЕНИЕ. Область определения: $X = \{x : x \neq \pm 1\}$; функция четная.

Построим сначала график функции $y = 1 - x^2$ — знаменателя этой дроби (на рис. 47 он изображен пунктиром). Затем «графически разделим 1 на $1-x^2$ », каждой точке (x_0, y_0) графика функции $y = 1 - x^2$ поставим в соответствие точку $(x_0, 1/y_0)$.

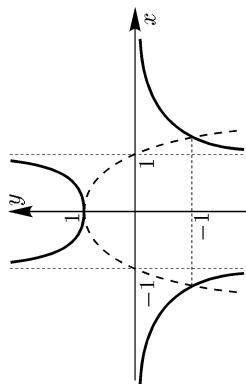


Рис. 47. График функции $y = \frac{1}{1-x^2}$

ЗАДАЧИ 1–5. Построить графики функций:

- 1) $y = -2x^2$;
- 2) $y = \frac{1}{x^2+1}$;
- 3) $y = \frac{1}{|x|}$;
- 4) $y = \sqrt[3]{|x|}$;
- 5) $y = \sin|x|$.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X , называется *нечетной*, если

- 1) множество X симметрично относительно начала координат;
- 2) для любого $x \in X$

$$f(x) = -f(-x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Его сначала можно построить при $x > 0$, а затем симметрично отразить относительно начала. Примерами нечетных функций являются

8. $y = x$ (рис. 5);
9. $y = 1/x$ (рис. 12);
10. $y = \sin x$ (рис. 7);
11. $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 9);
12. $y = \operatorname{sgn} x$ (рис. 3);
13. $y = \arcsin x$ (рис. 31а);
14. $y = \arctg x$ (рис. 32а);
15. $y = x^3$ (рис. 33);

16. $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 33);
17. $y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (рис. 38);
18. $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (рис. 39).

ПРИМЕР 19. Построить график функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Область определения: $X = \{x : x \neq 0\}$; функция нечетна. Представим функцию в виде суммы $y = x + \frac{1}{x}$ и сложим графики двух функций $y_1 = x$ (прямая) и $y_2 = \frac{1}{x}$ (гипербола) при $x > 0$. Ясно, что $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$ при $x > 0$; поэтому график суммы лежит выше гиперболы и выше прямой, при этом при больших x приближается к прямой, так как величина y_2 при таких x мала. Используя симметрию, достраиваем график при $x < 0$.

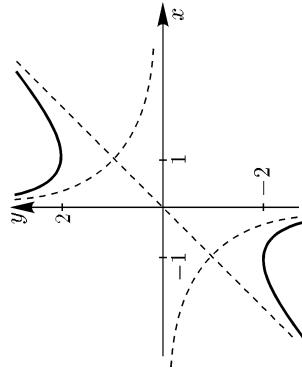


Рис. 48. График функции $y = \frac{x^2+1}{x}$

ЗАДАЧИ 6–7. Построить графики функций

- 6) $y = -\frac{1}{x}$;
- 7) $y = \frac{x^2-1}{x}$.

Периодические функции. Функция $y = f(x)$ с областью определения X называется *периодической*, если существует ненулевое число T , такое, что:

- 1) для каждого $x \in X$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат X ;

2) для каждого $x \in X$

$$f(x+T) = f(x).$$

Число T называется *периодом* функции $f(x)$.

Хорошо известно, что функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$, а функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — периодическими с периодом $T = \pi$.

Задача 8. Доказать, что функция $y = \sqrt{\ln \sin x}$ из примера 1в является периодической с периодом 2π .

Пример 20. Доказать, что функция $y = \sin(\sqrt{x})^2$ не является периодической.

Решение. Область определения: $X = [0, +\infty)$. Точка $x = 0$ входит в X , но ни для какого $T \neq 0$ числа $0 + T$ и $0 - T$ не могут входить в X одновременно. Первое условие из определения периодической функции нарушено. \square

Задача 9. Доказать, что постоянная функция является периодической, но не имеет наименьшего положительного периода.

Пример 21. Построить график функции $y = \log_{1/2} \cos 2x$.

Решение. Область определения функции задается условием положительности аргумента логарифма: $X = \{x : \cos 2x > 0\}$. Из четности функции $\cos 2x$ вытекает, что множество X симметрично относительно начала координат и для любого $x \in X$

$$\log_{1/2} \cos 2x = \log_{1/2} \cos(-2x),$$

т.е. функция y четна.

Покажем, что функция y периодична с периодом π . Решая неравенство $\cos 2x > 0$, получаем область определения:

$$X = \{x : \pi k - \frac{\pi}{4} < x < \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Если $x \in (\pi k - \frac{\pi}{4}, \pi k + \frac{\pi}{4})$, то $x \pm \pi \in (\pi(k \pm 1) - \frac{\pi}{4}, \pi(k \pm 1) + \frac{\pi}{4}) \in X$, так что первое требование из определения периодической функции выполнено. Далее, в силу периодичности косинуса имеем

$$y(x + \pi) = \log_{1/2} \cos(2x + 2\pi) = \log_{1/2} \cos 2x = y(x).$$

Построим график этой функции сначала на полунитервале $[0, \pi/4]$. Выпишем значения функции y в точках 0 и $\pi/8$:

$$y(0) = \log_{1/2} \cos 0 = \log_{1/2} 1 = 0,$$

$$y(\pi/8) = \log_{1/2} \cos \frac{\pi}{4} = \log_{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log_{1/2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

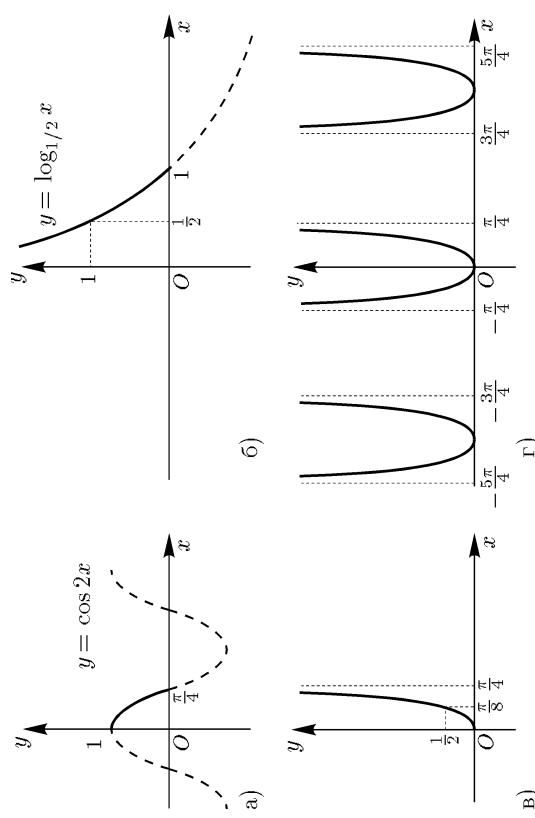


Рис. 49

Далее, если мы будем увеличивать значение $x \in [0, \pi/4]$ от 0 до $\pi/4$, то $t = \cos 2x$ будет уменьшаться от 1 до 0, а $y = \log_{1/2} t$ будет неограниченно увеличиваться от значения $y = 0$ (см. рис. 49a, б). Поэтому график функции $y = \log_{1/2} \cos 2x$ на $[0, \pi/4]$ имеет вид, указанный на рис. 49в.

Используя четность функции, достраиваем этот график на полунитервале $(-\pi/4, 0]$, а затем переносим этот график на все интервалы области определения, используя периодичность (см. рис. 49г). \square

ПРИМЕР 22. Построить график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Решение. При построении этого графика полезно иметь перед глазами графики «внутренней» функции $y = \operatorname{tg} x$ и «внешней» функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Функция $\operatorname{arctg} x$ определена при всех действительных значениях x ; поэтому область определения исследуемой функции совпадает с областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$: $X = \{x : x \neq \pi n + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

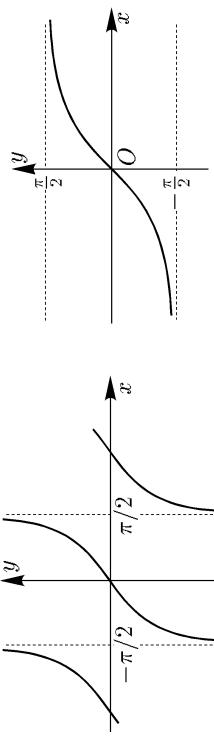


Рис. 50. График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

Функция $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ является периодической с периодом π , поскольку таковой является внутренняя функция $\operatorname{tg} x$:

$$y(x + \pi) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x + \pi)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = y(x).$$

Построим график нашей функции сначала на полуинтервале $(-\pi/2, \pi/2)$, затем, завершим построение, используя периодичность. По определению арктангенса имеем $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$; поэтому на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ график совпадает с графиком функции $y = x$.

Отметим, что наша функция нечетна:

$$y(-x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-x)) = \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg} x) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = -y(x),$$

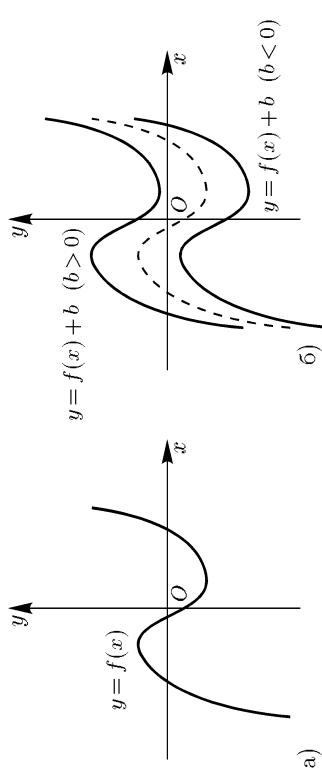
но при построении графика это не понадобилось. \square

Простейшие приемы построения графиков

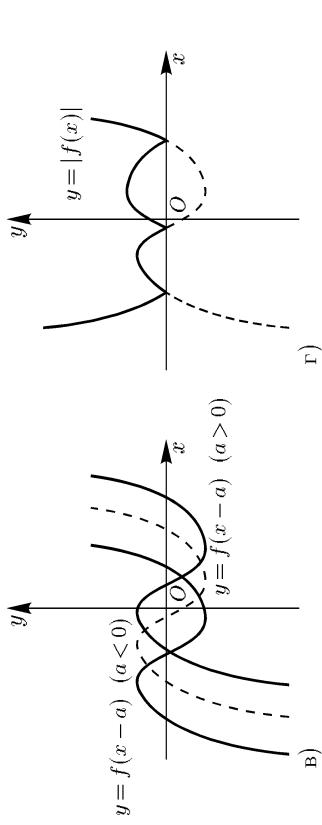
При построении графиков функций мы будем придерживаться следующей схемы, присоединяя к ней новые этапы по мере необходимости:

- 1) нахождение области определения функции;
- 2) исследование симметрии графика функции — четности или нечетности функции;
- 3) исследование функции на периодичность.

В дальнейшем мы увидим, что часто оказывается полезным также а) выявление «характерных» точек графика функции, в частности, точек пересечения с осями; б) изучение поведения функции около концов промежутка (если функция рассматривается на конечном промежутке); в) изучение поведения функции, когда аргумент становится сколь угодно большим по модулю. Показа подходящих примеров не было.



б)



б)

Рис. 51

Напомним простые правила, часто помогающие при построении графиков функций. Из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 51a) график функции

а) $y = f(x) + b$ получается сдвигом вдоль оси Oy на величину b (вверх, если $b > 0$ и вниз, если $b < 0$) (см. рис. 51b);

б) $y = f(x - a)$ получается сдвигом вдоль оси Ox на величину a (вправо, если $a > 0$ и влево, если $a < 0$) (см. рис. 51b);

в) $y = |f(x)|$ получается отражением части графика, лежащей ниже оси Ox , относительно этой оси (см. рис. 51г);

ПРИМЕР 23*. Построить график функции $y = \arcsin \frac{1}{2}(|x| - 1)$.

РЕШЕНИЕ. Область определения исследуемой функции задается неравенством $\left|\frac{1}{2}(|x| - 1)\right| \leqslant 1$. Чтобы решить его, построим график функции $y = \frac{1}{2}(|x| - 1)$. Это можно сделать, используя схему $|x| \rightarrow |x| - 1 \rightarrow \frac{1}{2}(|x| - 1) \rightarrow \left|\frac{1}{2}(|x| - 1)\right|$ (рис. 52а), б), в), г)) .

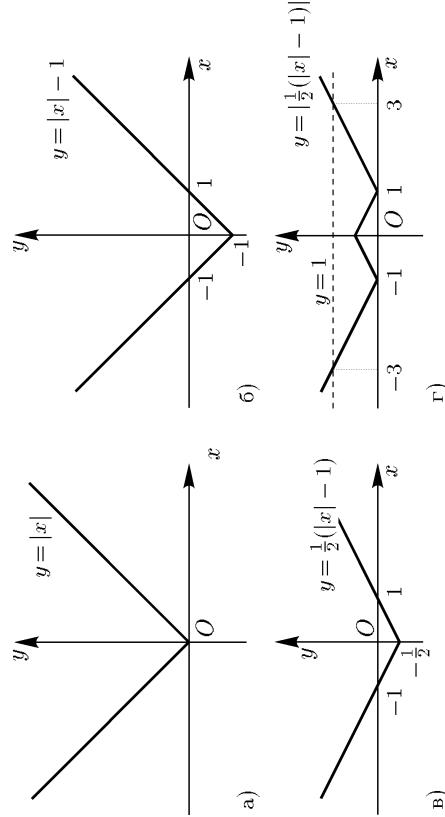


Рис. 52

Из рис. 52г) видно, что решением неравенства $\left|\frac{1}{2}(|x| - 1)\right| \leqslant 1$ являются значения x из отрезка $[-3, 3]$. Итак, $X = [-3, 3]$.

Отметим, что исследуемая функция четна, поскольку $|-x| = |x|$. Она не является периодической, поскольку ее областью определения является отрезок. Построим график этой функции на отрезке $[0, 3]$.

Отметим, что $y(0) = \arcsin 0 = 0$, $y(3) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Из графика на рис. 52г) видно, что при увеличении x от 0 до 1 аргумент арксинуса убывает от $1/2$ до 0. При этом арксинус (см. рис. 31а) убывает от $\pi/6$ до 0. Далее, при увеличении x от 1 до 3 аргумент арксинуса возрастает от 0 до $1/2$. При этом арксинус возрастает от 0 до $\pi/2$. Остается отразить эту зависимость на рисунке и достроить график функции, используя четность.

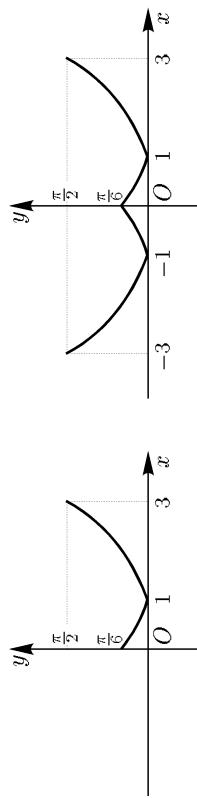


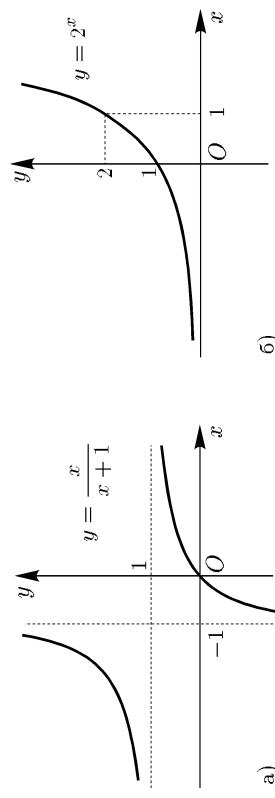
Рис. 53. График функции $y = \arcsin \frac{1}{2}(|x| - 1)$

Отметим, что на рис. 53 изображен лишь эскиз графика. Мы пока не можем выяснить, например, есть ли действительно «изломы» у графика этой функции при $x = \pm 1$ и $x = 0$ (у нас пока даже нет соответствующего определения).

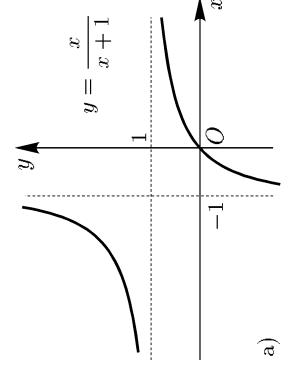
ПРИМЕР 24. Построить график функции $y = 2^{\frac{x}{1+x}}$.

РЕШЕНИЕ. Область определения: $X = \{x : x \neq -1\}$. Функция принимает только положительные значения.

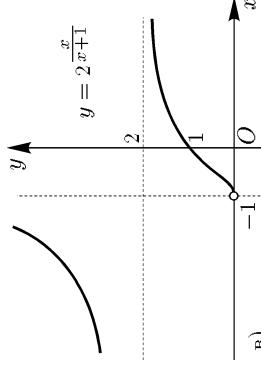
Функция не является ни четной, ни нечетной, она также не является периодической.



6)



a)



b)

Рис. 54

Изобразим график функции $y = \frac{x}{x+1}$ (рис. 54а) и $y = 2^x$ (рис. 54б). При увеличении x от $-\infty$ до -1 функция $\frac{x}{x+1}$ возрастает от 1 до $+\infty$. Функция 2^x , когда ее аргумент увеличивается от 1 до $+\infty$, возрастает от 2 до $+\infty$. При увеличении x от -1 до $+\infty$ функция $\frac{x}{x+1}$ возрастает от $-\infty$ до 1. Функция 2^x , когда ее аргумент увеличивается от $-\infty$ до 1, возрастает от 0 до 2. В результате получим эскиз графика (рис. 54в).

Задачи 10–16. Д260, 269, 305, 315, 324.1в), *, л).

Занятие 2

Теоретический материал: пп. 1.1–1.8, 1.13 (лекции 1, 3).

Действительные числа

Действительные числа были определены на 1-й лекции как бесконечные десятичные дроби.

ПРИМЕР 1. Представить бесконечной десятичной дробью рациональное число $\frac{7}{13}$.

Решение. Мы начали делим 70 на 13 с остатком. Получаем первую цифру в искомой десятичной дроби (5) и остаток 5. Теперь делим 50 на 13 с остатком, получаем вторую цифру после запятой (3) и остаток 11. На следующем шаге делим 110 на 13 с остатком и т.д. После того как некоторый остаток (у нас это 5) встретится вторично, все начинает повторяться, и получается периодическая бесконечная дробь. Ответ:

$$\frac{7}{13} = 0.\overline{538461} \dots 538461 \dots \quad \square$$

ВОПРОС. Почему бесконечная десятичная дробь, представляющая рациональное число, обязательно периодична?

Ответ. Рациональное число (будем для простоты считать его положительным) — это отношение p/q двух целых положительных чисел. В процессе деления с остатком остатки всегда меньше знаменателя q . Поэтому число возможных разных остатков не

превосходит q . На некотором шаге либо получается нулевой остаток (это случай, когда взятое число было десятично-рациональным), либо повторяется уже встречавшийся остаток. После этого цифры в ответе начинают повторяться. \square

ПРИМЕР 2. Приведите пример бесконечной десятичной дроби, изображающей иррациональное число.

Решение. Здесь неограниченное количество возможностей. Например, напишем после запятой 0, потом 1, потом 00, потом 11 и т.д. Получается непериодическая десятичная дробь

$$0,010011\dots\underbrace{0}_n\underbrace{1}_n\underbrace{0}_n\dots$$

Это иррациональное число. \square

Числовые последовательности

Мы сначала займемся проверкой монотонности и/или ограниченности некоторых последовательностей. Можете ли Вы аккуратно определить, что такое возрастающая последовательность, неубывающая последовательность, убывающая последовательность, невозрастающая последовательность, ограниченная последовательность, ограниченная сверху последовательность, ограниченная снизу последовательность?

Проверьте себя, заглянув в лекции.

ПРИМЕР 3. Проверить, что $\{\sqrt{n}\}_1^\infty$ — возрастающая последовательность.

Решение. Это утверждение очевидно, если знать, что \sqrt{x} — возрастающая функция, что будет аккуратно доказано на лекциях. Сейчас можно предложить следующее элементарное решение. Составим разность последующего и предыдущего членов последовательности и убедимся в том, что она положительна:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0. \end{aligned}$$

Этим показано, что последовательность $\{\sqrt{n}\}_1^\infty$ возрастает. \square

ПРИМЕР 4. Исследовать на монотонность последовательность $a_n = 2^n/n!$ ($n = 1, 2, \dots$).

РЕШЕНИЕ. Здесь удобно составить отношение a_{n+1}/a_n :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Так как

$$\frac{2}{n+1} < 1,$$

то наша последовательность не возрастаеточая. Но

$$\frac{2}{n+1} < 1 \quad \text{при } n \geq 2;$$

поэтому последовательность является убывающей, начинная с номера $n_0 = 2$. \square

Заметим, что те же выводы получаются, если рассмотреть разность $a_{n+1} - a_n$ (проверьте это самостоятельно).

ПРИМЕР 5. Исследовать на монотонность последовательность

$$a_n = \frac{3n+2}{2n+3}.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим разность $a_{n+1} - a_n$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3n+5}{2n+5} - \frac{3n+2}{2n+3} = \frac{(3n+5)(2n+3) - (3n+2)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} \\ &= \frac{5}{(2n+5)(2n+3)} > 0. \end{aligned}$$

Значит, данная последовательность является возрастающей. \square

ПРИМЕР 6. Исследовать на монотонность последовательность $a_n = \{|n-3|\}_1^\infty$.

РЕШЕНИЕ. Эта последовательность не является монотонной. Действительно, $a_2 > a_3$, но $a_3 < a_4$. Но последовательность $\{|n-3|\}_1^\infty$ является возрастающей, начиня с $n_0 = 3$, так как $|n-3| = n-3$ при $n \geq 3$. \square

ЗАДАЧИ 1–6. Исследовать на монотонность последовательности:

- 1) $\left\{ \frac{n-2}{n} \right\};$
- 2) $\{\lg n\};$
- 3) $\{n-n^2\};$
- 4) $\left\{ \frac{n^3}{2^n} \right\};$
- 5) $\left\{ (1+(-1)^n) \frac{1}{n} \right\};$
- 6) $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}.$

ПРИМЕР 7. Проверить, что $\{\sqrt{n}\}_1^\infty$ — неограниченная последовательность.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что так как эта последовательность неубывающая, то она ограничена сверху своим первым членом: $\sqrt{n} \geq \sqrt{1} = 1$ при всех n . Поэтому проверить надо неограниченность сверху.

Для любого натурального N , взяв $n = N^2$, мы получим $\sqrt{n} = N$, так что наша последовательность содержит сколь угодно большие числа. Это и значит, что она неограничена: ни при каком $C > 0$ неравенство $\sqrt{n} \leq C$ не может быть выполнено при всех n . \square

ПРИМЕР 8. Проверить ограниченность последовательности из примера 4.

РЕШЕНИЕ. Мы показали, что $\{a_n\}$ — невозрастающая последовательность; значит, она ограничена сверху своим первым членом $a_1 = 2$. Но она состоит из положительных чисел, и легко видеть, что

$$0 < a_n \leq 2,$$

чем и показано, что последовательность ограничена. \square

ПРИМЕР 9. Проверить ограниченность последовательности из примера 5.

РЕШЕНИЕ. $|a_n| = \frac{3n+2}{2n+3} \leq \frac{4n+6}{2n+3} = 2$. \square

Можно получить более точные неравенства для a_n , но нам этого не нужно.

ЗАДАЧИ 7–12. Исследовать на ограниченность последовательности из задач 1–6.

Метод математической индукции

На лекции 3 при помощи индукции выведена формула Ньютона для $(1+x)^n$.

ПРИМЕР 10. Вывести формулу для суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1) \quad (1)$$

при помощи индукции.

РЕШЕНИЕ. *База индукции:* при $n = 1$

$$1 + q = \frac{1 - q^2}{1 - q},$$

эта формула очевидна.

Шаг индукции. Предположим, что формула (1) верна при некотором n , и покажем, что тогда она остается верной при замене n на $n + 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} 1 + q + \dots + q^n + q^{n+1} &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Этим формула (1) доказана для всех n . \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (1) легко проверяется умножением обеих частей равенства на $1 - q$: слева все члены сокращаются, кроме 1 и $-q^{n+1}$ (проделайте эту выкладку).

ЗАДАЧА 13. Проверить при помощи индукции формулу для суммы арифметической прогрессии:

$$a + 2a + \dots + na = \frac{n(n+1)}{2} a. \quad (2)$$

Бином Ньютона

ПРИМЕР 11. Проверить, что

$$\boxed{\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.}$$

РЕШЕНИЕ. В формуле для $(1 + x)^n$ полагаем $x = 1$; это сразу дает нужный результат. \square

Треугольник Паскаля. Из биномиальных коэффициентов при помошни формулы $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ составляется так на-

зывающий *треугольник Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Здесь боковые диагонали состоят из единиц и любое другое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним. 1-я строка — это строка из коэффициентов выражения $1 + x$. Во второй строке стоят коэффициенты правой части «школьной» формулы

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

В 3-й строке стоят коэффициенты также хорошо известной формулы

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

ЗАДАЧА 14. Проверить, что в 4-й строке стоят коэффициенты разложения

$$(1 + x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^k,$$

и составить следующую строку треугольника Паскаля.

Можно проверить (при помошни индукции), что в n -й строке стоят коэффициенты разложения $(1 + x)^n$.

Занятие 3

Теоретический материал: гл. 1.4–1.12, 1.16, 1.17 (лекции 2–4).

Пределы последовательностей

Нам здесь понадобятся, в частности, следующие понятия и теоремы:

Определения конечного и бесконечного предела последовательности.

Теоремы об арифметических действиях с пределами.

Определения бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей, связь между ними.

Переход к пределу в неравенствах.

Сформулируйте эти определения и теоремы и проверьте себя по лекциям. Если Вы что-то упустили, постарайтесь понять допущенные ошибки и повторите правильные формулировки.

УПРАЖНЕНИЕ 1.16.6. Показать, что неубывающая не ограниченная сверху последовательность $\{a_n\}$ стремится к $+\infty$.

Решение. Возьмем сколь угодно большое число t . Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то найдется такое n_0 , что $a_{n_0} > t$. А так как последовательность не убывает, то $a_n \geq a_{n_0}$ при всех $n \geq n_0$, так что

$$a_n > t \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Этим показано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. \square

ЗАДАЧА 1. Доказать, что невозрастающая не ограниченная снизу последовательность стремится к $-\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4.2. Показать, что если a_n не зависит от n , т.е. $a_n = a$ для всех n , то $a_n \rightarrow a$ (предел постоянной есть a для a для a).

Решение. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ для всех $n \geq N = 1$ выполняется неравенство $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$. \square

Заметим, что в этом случае N не зависит от ε . Очевидно, что и наоборот, если N не зависит от ε , то $a_n = a$, начиная с номера N (в самом деле, если при $n \geq N$ для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, то $|a_n - a| = 0$).

ПРИМЕР 1. Найти предел последовательности $a_n = \frac{2n+3}{3n+2}$.

Решение. Легко видеть, что числитель и знаменатель — не ограниченные сверху возрастающие последовательности, а, значит, они стремятся к бесконечности. Теоремой о пределе отношения здесь воспользоваться нельзя. Мы имеем дело с *непределимостью типа $\infty - \infty$* . Чтобы раскрыть ее, поделим числитель и знаменатель на n . Получим

$$a_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}}.$$

Так как $\{n\}$ — бесконечно большая последовательность, то $\{1/n\}$ — бесконечно малая последовательность. Остается воспользоваться

ся тем, что предел постоянной есть сама эта постоянная, и теоремами об арифметических операциях с пределами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{3 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{2 + 3 \cdot 0}{3 + 2 \cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Это решение, конечно, можно записать короче:

$$a_n = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}. \quad \square$$

ПРИМЕР 2. Показать, что последовательность $a_n = 2^n/n!$ имеет конечный предел, и найти его.

На 2-м занятии было показано, что эта последовательность монотонна и ограниченна. Значит, эта последовательность имеет конечный предел в силу теоремы Вейерштрасса. Обозначим этот предел через a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$$

(найдите в лекциях соответствующее замечание в п. 1.9). На 2-м занятии мы отметили, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1},$$

так что

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n. \quad (1)$$

Так как $\{n+1\}$ — бесконечно большая последовательность, то $\{1/(n+1)\}$ — бесконечно малая последовательность. Переходя в равенстве (1) к пределу, получаем

$$a = 2 \cdot 0 \cdot a = 0,$$

так что $a = 0$. \square

Итак, мы показали, что $2^n/n! \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАДАЧА 2. Показать, что при любом $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Заметим, что при $0 < a \leq 1$ такой результат очевиден (почему?).

ПРИМЕР 3. Показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$.

На предыдущем занятии мы проверили, что это возрастающая не ограниченная сверху последовательность. Остается воспользоваться результатом упражнения 1.16.6.

ДРУГОЕ РЕШЕНИЕ примера 3. Для сколь угодно большого числа $t > 0$ найдется такой номер n_0 , что

$$n > t^2 \quad \text{при } n > n_0.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{n} > t \quad \text{при } n > n_0,$$

чем и показано, что $\sqrt[n]{n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. \square

ЗАДАЧА 3. Проверить, что если $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) и k — натуральное число, то $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

ПРИМЕР 4. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 1, \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Решение. Пусть $a > 1$. Запишем a в виде $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$, и воспользуемся binomом Ньютона:

$$a^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^2 + \cdots + \alpha^n.$$

Здесь все слагаемые справа положительны; поэтому

$$a^n > n\alpha. \quad (3)$$

Правая часть в (3) стремится к $+\infty$, тем более $a^n \rightarrow +\infty$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда воспользуемся тем, что

$$a^n = \frac{1}{(1/a)^n}.$$

Здесь $1/a > 1$, так что по доказанному $(1/a)^n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Остается воспользоваться связью между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями. Мы получили, что $a^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). \square

Заметим, что неравенство (3) является очень грубым: a^n стремится к бесконечности «гораздо быстрее», чем $n\alpha$. Но зато ясно, что $n\alpha \rightarrow +\infty$, чем мы по существу и воспользовались. В следующем примере мы усилим полученный результат:

ПРИМЕР 5. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (4)$$

при любом натуральном k и любом $a > 1$.

РЕШЕНИЕ. Снова запишем a в виде $1 + \alpha$, $\alpha > 0$, и воспользуемся binомом Ньютона, но на этот раз оставим в правой части более далекий член (считая, что $n > k$):

$$a^n > \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} \alpha^{k+1}.$$

Поделим обе части на n^k . Получим

$$\frac{a^n}{n^k} > Cn \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right), \quad \text{где } C = \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} = \text{const}. \quad (5)$$

Пусть $n > 2k$. Тогда все выражения в скобках больше $1/2$; загрублля неравенство (5), можно написать

$$\frac{a^n}{n^k} > C_1 n, \quad \text{где } C_1 = \frac{C}{2^k}.$$

Отсюда уже ясно, что $a^n/n^k \rightarrow +\infty$. Как следствие $n^k/a^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). \square

ПРИМЕР 6. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$; это легко проверяется от противного. Поэтому $\sqrt[n]{n} > 1$ при $n > 1$. Отсюда следует, что

$$\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$$

при этих n . Надо показать, что $\alpha_n \rightarrow 0$. Имеем

$$(1 + \alpha_n)^n = n.$$

Снова воспользуемся биномом Ньютона. При $n > 2$

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$$

ввиду положительности всех членов. Сравнивая левую и правую части, получаем

$$\frac{2}{n-1} > \alpha_n^2 > 0.$$

По теореме о предельном переходе в двух неравенствах

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Действительно, возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$; найдется такое n_0 , что

$$\alpha_n^2 < \varepsilon^2 \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Тогда

$$0 < \alpha_n < \varepsilon \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Итак, $\alpha_n \rightarrow 0$; этим показано, что $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. \square

Задачи 4–9. Найти пределы последовательностей

$$4) \left\{ \frac{n-2}{n} \right\}; \quad 5) \left\{ \frac{n^3}{2^n} \right\}; \quad 6) \left\{ (1 + (-1)^n) \frac{1}{n} \right\};$$

$$7) \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}; \quad 8) \left\{ nq^n \right\} \quad (|q| < 1); \quad 9) \left\{ \sqrt[n]{a} \right\} \quad (a > 0).$$

Решение. Докажем сначала, что

$$\log_2 x < x. \quad (1)$$

Это неравенство равносильно неравенству $x < 2^x$. Последнее проверяется при помонии бинома Ньютона следующим образом. Пусть $m = [x]$ — целая часть числа x , т.е. такое целое число, что $m \leq x < m+1$. Тогда

$$2^x \geq 2^m = (1+1)^m = 1+m+\dots \geq 1+m > x.$$

Далее, имеем

$$\frac{\log_a n}{n} = \frac{1}{\log_2 a} \frac{\log_2 n}{n} = \frac{1}{\log_2 a} \frac{2 \log_2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где последовательность $\log_2 \sqrt{n}/\sqrt{n}$ ограничена в силу неравенства (1), а $1/\sqrt{n}$ — бесконечно малая. Значит, $(\log_a n)/n$ — тоже бесконечно малая. \square

ПРИМЕР 2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$.

Решение. Так как $\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n$, то $\sqrt{n^2+1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому мы имеем здесь неопределенность типа $\infty - \infty$. Воспользоваться теоремой о пределе разности нельзя. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделить и умножить разность в скобках на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+1} - n &= \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}. \end{aligned}$$

Справа знаменатель стремится к ∞ ; поэтому дробь стремится к 0. Ответ: 0. \square

ПРИМЕР 3. Показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty$.

Решение. Мы снова имеем неопределенность типа $\infty - \infty$.

Оценим $n - n^2$ сверху величиной, которая заведомо стремится к $-\infty$:

ПРИМЕР 1. Доказать, что

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.}$$

Здесь $1 - n$ убывает и не ограничена сверху; поэтому $1 - n \rightarrow -\infty$. Тем более $n - n^2 \rightarrow -\infty$ (почему?). \square

Задумаемся теперь лекционными упражнениями.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4.1. Проверить эквивалентность двух определений предела:

- 1) $a_n \rightarrow a$, если для любой окрестности $O(a) = (b, c)$ точки a найдется такой номер N , что $a_n \in O(a)$ при $n \geq N$.
- 2) $a_n \rightarrow a$, если вне любой окрестности $O(a)$ может лежать лишь конечное число членов последовательности.

Решение. Пусть $a_n \rightarrow a$ в смысле первого определения. Возьмем любую окрестность $O(a)$. По предположению, найдется такое N , что $a_n \in O(a)$ при $n \geq N$. Значит, вне $O(a)$ могут лежать (или не лежать) только a_1, \dots, a_{N-1} . Мы показали, что $a_n \rightarrow a$ в смысле 2-го определения.

Теперь пусть $a_n \rightarrow a$ в смысле второго определения. Возьмем любую окрестность $O(a)$. По предположению, вне ее может лежать только конечное число членов последовательности. Пусть это члены a_{n_1}, \dots, a_{n_l} . Положим

$$N = \max\{n_1, \dots, n_l\} + 1.$$

Тогда $a_n \in O(a)$ при $n \geq N$. Мы показали, что $a_n \rightarrow a$ в смысле 1-го определения. \square

Этим показано, что определения эквивалентны. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.9.1. Проверить, что в определении предела последовательности $n \geq N$ можно заменить неравенством $n > N$.

Решение. Если неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ выполняется для $n \geq N$, то оно выполняется для $n > N$. Если неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ выполняется для $n > N$, то оно выполняется для $n \geq N_1 = N + 1$. Отсюда видна эквивалентность определений. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.9.2. Проверить, что в определении предела неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ можно заменить на неравенство $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Решение. В обоих определениях важно, что ε можно взять сколь угодно малым. Пусть $a_n \rightarrow a$ в смысле определения со знаком \leq перед ε . Возьмем любое $\varepsilon' > 0$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon'/2$. Найдется такое N , что $|a_n - a| \leq \varepsilon_1 = \varepsilon'/2$ при $n \geq N$. Тогда $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Обратно, пусть $a_n \rightarrow a$ в смысле определения со знаком $<$ перед ε . По любому $\varepsilon' > 0$ найдется такое N , что $|a_n - a| < \varepsilon'$ при $n \geq N$. Но тогда, конечно, $|a_n - a| \leq \varepsilon$ при $n \geq N$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.9.3. Доказать по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение. Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ из определения предела в этом случае выглядит так:

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon, \quad \text{или } \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{или } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поэтому в качестве N можно взять любое натуральное число, большее $1/\varepsilon$, например, $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x : $[x] \leq x < [x] + 1$). Тогда при $n \geq N(\varepsilon)$ имеем

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon, \quad \text{т. е. } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует целое число $N = N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$, такое, что $|1/n| < \varepsilon$ при $n \geq N$. \square

ПРИМЕР 4*. Доказать по определению предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 29n}{2n^2 + 15n - 33} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Мы должны показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$

$$\left| \frac{n^2 - 29n}{2n^2 + 15n - 33} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Можно было бы попытаться решить выписанное неравенство, т. е. указать все натуральные значения n , при которых оно справедливо. Но мы сначала определим сверху выражение под знаком модуля, а затем решим более простое неравенство.

Имеем для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{n^2 - 29n}{2n^2 + 15n - 33} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-73n + 33}{2(2n^2 + 15n - 33)} \right| = \frac{|73n - 33|}{2|2n^2 + 15n - 33|} = \frac{|73n - 33|}{2|2n^2 + 15n - 33|} < \frac{73n}{2|2n^2 + 15n - 33|} < \frac{73n}{2|2n^2 + 15n - 33|} = \frac{73n}{40n}.$$

Далее, при $n \geq 3$ имеем $15n - 33 > 0$; поэтому знаменатель очевидно является снизу величиной $2n^2$. Значит, при $n \geq 3$

$$\frac{40n}{|2n^2 + 15n - 33|} < \frac{40n}{2n^2} = \frac{20}{n}.$$

Итак, чтобы выполнялось неравенство (2), достаточно, чтобы выполнялись оценки

$$n \geq 3 \quad \text{и} \quad \frac{20}{n} < \varepsilon. \quad (3)$$

Теперь выберем любой номер $N \geq 3$, такой, что $N > 20/\varepsilon$. Тогда для всех $n \geq N$ выполнены неравенства (3), а, значит, и (2). \square

Вообще, чтобы по определению доказать, что $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$), т. е. найти номер N , начиная с которого выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, следует либо попытаться решить «в лоб» это неравенство, либо оценить сверху величину $|a_n - a|$ некоторой положительной бесконечно малой α_n , для которой решение неравенства $\alpha_n < \varepsilon$ уже не представляет труда.

Задачи 1–2*. Доказать по определению предела, что

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3}; \quad 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+2n+7} = 0.$$

Упражнение 1.9.4. Проверить, что последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{a_n\}_0^\infty$ могут сходиться только одновременно и в случае сходимости имеют одинаковые пределы.

Решение. Действительно, определение предела для этих последовательностей записывается абсолютно одинаково:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

Поэтому доказывать нечего. \square

Упражнение 1.14. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Решение. Имеем при $n > 1$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}.$$

Здесь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 1.$$

Поэтому

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}$$

(использованы теоремы об арифметических действиях с пределами). \square

Упражнение 1.16.1. Доказать, что последовательность может иметь только один предел, конечный или бесконечный.

Решение. Допустим, например, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

где a — конечное число. Сходящаяся (к a) последовательность ограничена (см. предложение 1 в п. 1.4); поэтому существует C , такое, что $a_n \leq C$. Но по определению бесконечного предела, $a_n > C$ при достаточно больших n ($n \geq N$). Получается противоречие. \square

Упражнение 1.16.2. Показать, что последовательность, имеющая предел $+\infty$, ограничена сверху.

Решение. Пусть $a_n \rightarrow +\infty$. Возьмем какое-нибудь t (например, $t = 1$). Найдется такой номер N , что $a_n > t$ при $n \geq N$. Положим

$$C = \min \{a_1, \dots, a_{N-1}, t\}.$$

Тогда

$$a_n \geq C \quad \text{при всех } n. \quad \square$$

Задачи 3–7. Найти пределы

- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{n^3 + 7}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{7n + 1}$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^3}$;
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$.

Занятие 5

Теоретический материал: пп. 1.15–1.19 (лекции 4, 5).

Подпоследовательности

Упражнение 1.15. Пусть $a_{2k} \rightarrow a$ и $a_{2k+1} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$). Показать, что $a_n \rightarrow a$.

Решение. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_1 , что при всех $k \geq N_1$

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon,$$

и существует такое N_2 , что при всех $k \geq N_2$

$$|a_{2k+1} - a| < \varepsilon.$$

Положим $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$. При $n \geq N$ справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, поскольку если n четно, т. е. $n = 2k$, то $k \geq N_1$, а если n нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, то $k \geq N_2$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.16.3. Показать, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел, то тот же предел имеет любая ее подпоследовательность.

Решение. Пусть для определенности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Пусть t — произвольное число. По определению бесконечного предела, найдется такой номер N , что $a_n < t$ при всех $n \geq N$. Для любой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$, как мы знаем, $n_k \geq k$; поэтому при $k \geq N$ имеем $n_k \geq N$ и, следовательно, $a_{n_k} < t$. Значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = -\infty$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.16.4. Показать, что не ограниченная сверху последовательность обязательно содержит подпоследовательность, расходящуюся к $+\infty$.

Решение. Пусть последовательность $\{a_n\}$ не ограничена сверху. Тогда для любого числа c найдется номер n_0 , такой, что $a_{n_0} > c$.

Положим $c_1 = 1$. Существует такой номер n_1 , что $a_{n_1} > 1$.

Положим $c_2 = 2$. Существует такой номер $n_2 > n_1$, что $a_{n_2} > 2$ (так как если $a_n \leq 2$ при всех $n \geq n_1$, то последовательность $\{a_n\}$ оказывается ограниченной сверху).

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим такую возрастающую последовательность индексов $\{n_k\}_1^\infty$, что $a_{n_k} > k$ при всех k . Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} k = +\infty$, то и $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = +\infty$. \square

Приведем теперь примеры последовательностей, содержащих одновременно и сходящиеся, и расходящиеся подпоследовательности:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ n, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 1/n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ -n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (1)$$

ПРИМЕР 1. Исследовать на монотонность, ограниченность и существование предела последовательность $\{b_n\}$ (см. (1)).

Решение. Здесь $b_1 > b_2$, но $b_2 < b_3$, так что монотонности нет.

Последовательность не является также ограниченной, ибо она не ограничена сверху (содержит подпоследовательность $b_{2k} = -2k$, которая расходится к $-\infty$).

Предел последовательности также не существует, так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} = 0, \quad \text{но} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-2k) = -\infty,$$

и достаточно сослаться на теорему из п. 1.15. \square

ЗАДАЧИ 1-3. Исследовать на монотонность, ограниченность и существование предела последовательности:

$$1) \quad \{n(2 + (-1)^n)\}; \quad 2) \quad \{n^{(-1)^n}\};$$

$$3) \quad a_n = \begin{cases} k & \text{при } n = 2k, \\ \frac{k}{k+1} & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.16.5. Показать, что если последовательность $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел, то тот же предел имеет последовательность $\{b_n\}$, получаемая из $\{a_n\}$ добавлением, отбрасыванием или изменением конечного числа членов.

Решение. Сравним последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{a_n\}_{2}^\infty$. Вторая получается из первой отбрасыванием первого члена a_1 без изменения нумерации. В определениях предела $+\infty$ для обеих последовательностей *нет никакой разницы*.

Теперь сравним последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{\alpha_{n+1}\}_1^\infty$. Снова вторая получается из первой отбрасыванием a_1 , но теперь *умеренно* во второй последовательности *сдвигнута*. Рассмотрим для определенности случай предела $+\infty$. Если для любого t при $n \geq N$ справедливо неравенство $a_n > t$, то тем более $a_{n+1} > t$ при этих n . Наоборот, если $a_{n+1} > t$ при $n \geq N$, то $a_n > t$ при $n \geq N_1 = N + 1$.

Из сказанного вытекает справедливость всех утверждений в формулировке упражнения (почему?). \square

Символы O и o

ПРИМЕР 2. Показать, что $\sqrt{1998 + 850n^2} = O(n)$.

РЕШЕНИЕ. При $n \geq 1$ имеем

$$\left| \frac{\sqrt{1998 + 850n^2}}{n} \right| = \sqrt{\frac{1998}{n^2} + 850} \leq \sqrt{1998 + 850}. \quad \square$$

ЗАДАЧИ 4–6. Доказать следующие соотношения:

4) $n + n^2 \sin n = O(n^2)$; 5) $2n^3 - 3n^2 + 1 = O(n^3)$;

6) $\frac{n+3}{n^2+2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.18.1. «Расшифроваты» утверждение

$$O(1)o(1) = o(1).$$

Записать подобным образом утверждение: Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — тоже бесконечно малая последовательность (утверждение 2 из п. 1.10).

РЕШЕНИЕ. Утверждение $O(1)o(1) = o(1)$ совпадает с утверждением 3 из п. 1.10.

Утверждение 2 из п. 1.10 можно записать так:

$$o(1) + o(1) = o(1). \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.18.2. Проверить, что:

- а) $a_n O(b_n) = O(a_n b_n)$,
- б) $a_n o(b_n) = o(a_n b_n)$,
- в) $O(a_n) O(b_n) = O(a_n b_n)$,
- г) $o(a_n) O(b_n) = o(a_n b_n)$,
- д) $O(O(a_n)) = O(a_n)$,
- е) $o(O(a_n)) = o(a_n)$,
- ж) $O(o(a_n)) = o(a_n)$.

Привести пример к каждому из утверждений а)–ж).

Решение. а) Если $c_n = O(b_n)$, то $a_n c_n = O(a_n b_n)$. Действительно, соотношение $c_n = b_n h_n$, где h_n — ограниченная последовательность, можно умножить на a_n :

$$a_n c_n = (a_n b_n) h_n.$$

Пример: $\sin n = O(1)$, значит, $\frac{\sin n}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

б) Если $c_n = o(b_n)$, то $a_n c_n = o(a_n b_n)$. Рассуждение повторяет рассуждение из а), но h_n — бесконечно малая последовательность.

Пример: $\log_a n = o(n)$ при любом $a > 0$, $a \neq 1$ (см. пример 1 из занятия 4), значит, $n^k \log_a n = n^k o(n) = o(n^{k+1})$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

в) Если $c_n = O(a_n)$ и $d_n = O(b_n)$, то $c_n d_n = O(a_n b_n)$. Действительно, если $c_n = a_n h'_n$ и $d_n = b_n h''_n$, то $c_n d_n = b_n h''_n$, где h'_n , h''_n ограничены, то

$$c_n d_n = (a_n b_n)(h'_n h''_n), \quad (2)$$

где $h'_n h''_n$ — ограниченная последовательность.

Пример: $\sqrt{1998 + 850n^2} = O(n)$, cos $1913n = O(1)$ (почему?); поэтом $\sqrt{1998 + 850n^2} \cos 1913n = O(n)O(1) = O(n)$.

г) Если $c_n = o(a_n)$ и $d_n = O(b_n)$, то $c_n d_n = o(a_n b_n)$. Действительно, в этом случае вновь справедлива формула (2), но последовательность h'_n является бесконечно малой и, значит, бесконечно малой является последовательность $h'_n h''_n$ как произведение бесконечно малой и ограниченной (утверждение 3 из п. 1.10).

Пример: $\ln n = o(n)$, $(n^2 + 1)^{-1/2} = O(1/n)$ (убедитесь в этом); поэтом $\frac{\ln n}{\sqrt{n^2 + 1}} = o(n)O(1/n) = o(1)$.

Отметим, что соотношения а) и б), конечно, вытекают из соотношений в) и г). Но полезно увидеть непосредственно, какие утверждения скрываются за каждым из рассматриваемых соотношений.

д) Если $b_n = O(a_n)$ и $c_n = O(b_n)$, то $c_n = O(a_n)$. Действительно, $b_n = a_n h'_n$, $c_n = b_n h''_n$, где h'_n , h''_n — ограниченные последовательности. Тогда $c_n = a_n h'_n h''_n$, где последовательность $h'_n h''_n$ ограничена как произведение ограниченных последовательностей.

Пример: при $a > 1$ имеем $n^k = O(a^n)$, а $a^n = O(n!)$ (найдите в занятии 3 утверждения, из которых это вытекает); поэтому $n^k = O(O(n!)) = O(n!)$. Этот пример годится для всех оставшихся случаев, поскольку на самом деле $n^k = o(a^n)$, а $a^n = o(n!)$.

e) Если $b_n = O(a_n)$ и $c_n = o(b_n)$, то $c_n = o(a_n)$. В самом деле, теперь в формуле $c_n = a_n h'_n h''_n$ последовательность h'_n ограниченная, а h''_n бесконечно малая. Тем самым соотношение e) — следствие утверждения 3 из п. 1.1.10.

Пример: $\sqrt{n^2 + 1} = O(n)$, $n = o(2^n)$ (см. пример 5 из занятия 3); поэтому $\sqrt{n^2 + 1} = o(2^n)$.

Задачи 7–9. Проверить соответствие ж) из предыдущего упражнения, а также соотношения

$$\begin{aligned} 3) \quad o(o(a_n)) &= o(a_n), \\ \text{и) } \quad O(a_n) + o(a_n) &= O(a_n) \end{aligned}$$

и привести соответствующие примеры.

Кванторы

Утверждение 1.19. Записать при помощи квантовов утверждение «последовательность $\{a_n\}$ ограничена». Сформулировать и записать при помощи кванторов отрижение этого утверждения.

Решение. Исходное утверждение записывается так:

$$\exists C : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant C.$$

Утверждение «последовательность $\{a_n\}$ не является ограниченной» означает, что для любого числа C найдется член a_{n_0} последовательности, такой, что $|a_{n_0}| > C$. Запишем это утверждение посредством кванторов:

$$\forall C \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |a_{n_0}| > C. \quad \square$$

Пример 3. Записать при помощи квантовов утверждение «последовательность a_n расходится к $+\infty$ ». Сформулировать и записать при помощи кванторов отрижение этого утверждения.

Решение. Утверждение $\langle a_n \rightarrow +\infty \rangle$ записывается так:

$$\forall t \quad \exists n_0 : \quad \forall m \geqslant n_0 \quad a_n > t$$

или так:

$$\forall t \quad \exists n_0 : \quad n \geqslant n_0 \implies a_n > t.$$

Утверждение «последовательность a_n не является расходящейся к $+\infty$ » означает, что существует такое t_0 , для которого нельзя

найти подходящего n_0 (т.е. такого, для которого справедлива импликация $n \geqslant n_0 \implies a_n > t$). Это утверждение можно записать так:

$$\exists t_0 : \quad \forall n_0 \quad n \geqslant n_0 \not\implies a_n > t_0$$

или так:

$$\exists t_0 : \quad \forall n_0 \quad \exists n_1 > n_0 : \quad a_{n_1} \leqslant t_0.$$

Занятие 6

Контрольная работа №1

1. Доказать по определению предела, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n+2} = -1$.

2. Вычислить пределы:

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n^2-3n};$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+1};$$

$$4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+n^{10}}{3^n+2}.$$

3. Проверить, что

$$1) \quad \frac{\sin \sqrt{n}}{n+2} = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad 2) \quad n^2 + 1 = o(n!); \quad 3) \quad n^2 + 1 = O(2^n).$$

4. Доказать, что невозрастающая не ограниченная снизу последовательность имеет своим пределом $-\infty$.

5. Выделить из последовательности $\{n^{(-1)^n}\}$ две подпоследовательности, имеющие различные предельы. Что можно сказать о монотонности и ограниченности этих подпоследовательностей?

Занятие 7

Теоретический материал: пп. 2.1–2.4 (лекции 5–7).

Предел функции. Непрерывность

ПРИМЕР 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и постоянна в некоторой проколотой окрестности точки a , т.е. $f(x) = b$ для

$x \in O_h(a)$. Показать, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (т.е. предел постолинной есть сама эта постолинна).

РЕШЕНИЕ. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Ясно, что

$$|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$$

при всех $x \in O_h(a)$. Поэтому в качестве δ можно взять любое чило, не превосходящее h , так что δ не зависит от ε . Мы показали, что $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$. \square

ПРИМЕР 2. Проверить, что произведение бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций есть бесконечно малая функция.

Решение. Бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ имеет предел (равный 0); поэтому в некоторой окрестности точки a такая функция является ограниченной (по теореме из п. 2.1). Остается воспользоваться тем, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая функция. По существу мы разобрали частный случай последнего утверждения. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Проверить непрерывность функции $y = \cos x$ в любой точке.

Решение. Используя формулу (7) и неравенство (4) из п. 2.2, а также свойства модуля, получаем

$$|\cos x - \cos a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} \cdot 1,$$

так что

$$|\cos x - \cos a| \leq |x-a|.$$

Отсюда видно, что для любых a и $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Тогда если $|x-a| < \delta$, то $|\cos x - \cos a| < \varepsilon$. Мы проверили, что функция $\cos x$ непрерывна в точке a . \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Доказать теоремы 1 и 2 из п. 2.3 и вывести из них свойство линейности предела.

Сформулируем заново теорему 1, не используя формулы, чтобы обратить внимание читателя на важную деталь: это утверждение справедливо только для конечных пределов. Аналогично формулируется теорема 2 и свойство линейности предела.

ТЕОРЕМА 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \rightarrow a$ имеют конечные пределы, то сумма этих функций также обладает конечным пределом при $x \rightarrow a$, равным сумме пределов слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы существуют

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c. \quad (1)$$

Поэтому (см. п. 2.3) наши функции можно представить в виде

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad g(x) = c + \beta(x), \quad (2)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow a$. Следовательно,

$$f(x) + g(x) = b + c + \gamma(x).$$

Здесь $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.

В свою очередь, отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c. \quad \square$$

Укажите свойства бесконечно малых, которыми мы здесь воспользовались.

ТЕОРЕМА 2. При условиях (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = bc$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что

$$f(x)g(x) = bc + b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Здесь $b\beta(x) + c\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция в силу свойства 4 бесконечно малых из п. 2.3; $\alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая как произведение бесконечно малой при $x \rightarrow a$ на ограниченную (см. выше пример 2). Таким образом,

$$f(x)g(x) = bc + \gamma(x),$$

где $\gamma(x) = b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ — бесконечно малая функция. По свойству 1 бесконечно мало из п. 2.3

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = bc. \quad \square$$

Теперь можно доказать

СВОЙСТВО ЛИНЕЙНОСТИ ПРЕДЕЛА. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c,$$

то для любых α и β

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha b + \beta c.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) + \lim_{x \rightarrow a} (\beta g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha b + \beta c. \end{aligned}$$

Мы воспользовались теоремой 1, теоремой 2 и утверждением о пределе постоянной (см. пример 1). \square

Упражнение 2.4. Показать на примере, что при выполнении неравенства $f(x) < g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a неизвестно, вообще говоря, утверждать, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Решение. Пусть $f(x) = |\sin x|$, $g(x) = |x|$. В проколотой окрестности нуля

$$0 < |\sin x| < |x|$$

(см. неравенство (4) в п. 2.2). Однако

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \quad \square$$

Раскрытие простейших неопределенностей

Пример 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$.

Решение. Так как числитель и знаменатель — непрерывные функции, равные нулю в точке $x = 1$, то они стремятся к нулю при $x \rightarrow 1$ и мы имеем дело с неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. Однако при $x \neq 1$, разлагая числитель и знаменатель на множители, мы имеем

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)} = \frac{x+1}{x+6}.$$

Мы *сократили на* $(x-1)$ и этим по существу раскрыли неопределенность. Теперь можно применить теорему о пределе отношения:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+6)} = \frac{2}{7}. \quad \square$$

ПРИМЕР 4. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

(m и n — натуральные числа).

Решение. В числителе и знаменателе стоят непрерывные функции, равные 0 при $x = 0$. Поэтому мы снова имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$\begin{aligned} (1+mx)^n - (1+nx)^m &= 1 + nm x + \frac{n(n-1)}{2} m^2 x^2 + \dots \\ &\quad - \left(1 + mn x + \frac{m(m-1)}{2} n^2 x^2 + \dots \right) \\ &= \frac{nm(n-m)}{2} x^2 + cx^3 + \dots \end{aligned}$$

Здесь c — постоянная слагаемые, не выписанные явно, содержит x в более высокой, чем 3, степени. Поэтому при $x \neq 0$

$$\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{nm(n-m)}{2} + cx + \dots$$

Выражение, стоящее в правой части, — многочлен, а многочлен непрерывен в каждой точке, включая $x = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{nm(n-m)}{2} + cx + \dots \right) \\ &= \frac{nm(n-m)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Напомним читателю, что предел функции при $x \rightarrow a$ не зависит от значения функции в самой точке a . Мы пользовались этим в последних двух примерах, делая преобразования, справедливые, вообще говоря, лишь при $x \neq a$.

Задачи 1–10. Найти пределы Д411а), б), 412, 413, 418–423.

Занятие 8

Раскрытие неопределенностей (продолжение)

ПРИМЕР 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{9+2x}-5}{\sqrt[3]{9x-2}}$.

Решение. Избавившись от неопределенности типа $\frac{0}{0}$ здесь помогает *домножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение*. При $x \neq 8$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} &= \frac{(9+2x-5^2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{9+2x}+5)(x-8)} \\ &= \frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{9+2x}+5}, \end{aligned}$$

где дробь справа является отношением двух непрерывных функций, причем знаменатель отличен от 0 в точке 8. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{9+2x}+5} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{9+2x}+5)} = \frac{12}{5}. \quad \square \end{aligned}$$

Вычисляя предел в этом примере, мы воспользовались непрерывностью функций $y = \sqrt[3]{x^2}$ и $y = \sqrt[3]{9+2x}$. Эти функции относятся к *элементарным* функциям. Грубо говоря, элементарные функции — это те функции, которые изучают в школе. Мы будем пользоваться следующим утверждением: *элементарная функция непрерывна в каждой точке промежутка, на котором она определена*. Это будет показано в лекции 14.

Отрабатывая приемы вычисления пределов, мы не будем ограничиваться использованием лишь тех функций, непрерывность которых доказана к этому времени на лекциях. В частности, непрерывность таких *особых элементарных функций* как x^α , a^x , $\log_a x$, будет проверена в лекциях 13 и 14.

$$\text{ПРИМЕР 2. Найти предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} \quad (n — целое число).$$

Решение. Чтобы раскрыть эту неопределенность типа $\frac{0}{0}$, прибегнем к формуле

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + b^{k-1}), \quad (1)$$

которая проверяется раскрытием скобок. Фактически мы уже пользовались этой формулой (при $k = 2, 3$) в предыдущем при-

мере. В данном случае

$$\sqrt[3]{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1+x-1}{(1+x)^{\frac{n-1}{3}} + (1+x)^{\frac{n-2}{3}} + \dots + 1}.$$

Поэтому при $x \neq 0$

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{3}} + (1+x)^{\frac{n-2}{3}} + \dots + 1}.$$

Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{3}} + (1+x)^{\frac{n-2}{3}} + \dots + 1} = \frac{1}{n}. \quad \square$$

Результат

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n}}$$

полезно запомнить.

ПРИМЕР 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (n и n — целые числа).

Решение. При решении этого примера можно снова воспользоваться формулой (1), применив ее к числителю и знаменателю. Однако мы покажем, как свести задачу сразу к формуле (2). Метод, который при этом используется, называется «заменой переменной». Положим $x = 1+t$. Тогда $t = x-1$ и $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{\sqrt[n]{1+t}-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}}{\frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t}} \\ &= \boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}}. \quad \square \end{aligned}$$

Задачи 1–9. Найти пределы Д437–Д442, 425–427.

Упражнение 2.5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x}$. Раскрывается ли здесь неопределенность?

Решение. Функции $y = x$ и $y = \sin x$ непрерывны в любой точке (см. примеры 2 и 3 в п. 2.2). Кроме того, знаменатель x не

обращается в 0 в точке 1. По теореме о непрерывности отношения функция под знаком предела непрерывна в точке 1; поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1.$$

Непределенности здесь нет. \square

В следующих примерах используются первые замечательные пределы.

ПРИМЕР 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$.

Решение. Заметим, что выражение под знаком предела является неопределенностью типа $0 \cdot \infty$, однако она легко сводится к неопределенности типа $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} \cos 3x = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(кроме первого замечательного предела, мы воспользовались приемом 2 из п. 2.5 и непрерывностью в нуле третьего сомножителя). \square

Задачи 10–15. Найти пределы Д475, 476, 479, 480, 483, 495.

ПРИМЕР 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Решение. Под знаком предела неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Положим $x = \pi + t$, тогда $t = x - \pi$ и $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pi$. Поэтому имеем (с учетом того, что $\sin \pi m = \sin m\pi = 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin m(\pi + t)}{\sin n(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \pi m \sin mt}{\cos \pi n \sin nt} \\ &= \frac{\cos \pi m}{\cos \pi n} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mt}{mt} m}{\frac{\sin nt}{nt} n} = \frac{m \cos \pi m}{n \cos \pi n} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mt}{mt}}{\frac{\sin nt}{nt}} \\ &= \frac{m \cos \pi m}{n \cos \pi n} = \frac{(-1)^{m-n} m}{n} \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\cos k\pi = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$). \square

ПРИМЕР 6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$.

Решение. Здесь мы вновь имеем дело с неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. Домножая числитель и знаменатель на сопряженное к числителю выражение, сведем этот предел к уже известным:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x}) \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x}) \cos x} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(кроме первого замечательного предела, мы воспользовались приемом 2 из п. 2.5 и непрерывностью в нуле третьего сомножителя). \square

Занятие 9

Теоретический материал: пп. 2.6–2.8 (лекция 7).

Бесконечные пределы в конечной точке

УПРАЖНЕНИЕ 2.6.1. Сформулировать определение предела

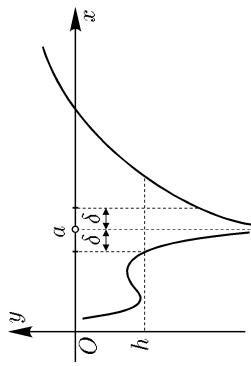
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

и сделать соответствующий чертеж.

Ответ. Функция $f(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow a$, если для любого h существует такое $\delta = \delta(h)$, что

$$f(x) < h \text{ при } x \in O_\delta(a)$$

(см. рис. 55). \square

Рис. 55. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

УПРАЖНЕНИЕ 2.6.2. Доказать, что если $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности $O(a)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty. \quad (1)$$

Решение. Пусть $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$. По определению предела для любого h существует такое $\delta > 0$, что $f(x) > h$ при $x \in O_\delta(a)$. Можно считать, что $O_\delta(a) \subset O(a)$ (если это не так, то мы просто уменьшим δ); поэтому

$$g(x) \geq f(x) > h \quad \text{при } x \in O_\delta(a),$$

и, значит, $g(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$. \square

Проверьте самостоятельно утверждение

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \quad (2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Доказать теоремы 1 и 2 из п. 2.7.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) — бесконечно большая при $x \rightarrow a$ функция. Тогда $\alpha(x) = 1/f(x) — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению бесконечно большой функции, для $h = 1/\varepsilon$ найдется такое число $\delta = \delta(h)$, что для всех $x \in O_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(x)| > h$ (и, в частности, $f(x) \neq 0$). Тогда

$$|\alpha(x)| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{h} = \varepsilon \quad \text{для всех } x \in O_\delta(a).$$

Значит, $\alpha(x) — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.$ \square

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha(x) — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ и $\alpha(x) \neq 0$ в $O_\delta(a)$ при некотором $\delta > 0$. Тогда $f(x) = 1/\alpha(x) — бесконечно большая функция при $x \rightarrow a$.$$

Доказательство. Пусть $h > 0$ произвольно. По определению бесконечно малой функции, для $\varepsilon = 1/h$ найдется такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, что для всех $x \in O_{\delta_1}(a)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Можно считать, что $\delta_1 \leq \delta$, так что $O_{\delta_1}(a) \subset O_\delta(a)$ (если это не так, то мы можем уменьшить δ_1 , положив, например, $\delta_1 = \delta$). Так как $\alpha(x) \neq 0$ в $O_\delta(a)$, то для всех $x \in O_{\delta_1}(a)$ получаем, что

$$|f(x)| = \frac{1}{|\alpha(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} = h.$$

Этим показано, что $|f(x)| \rightarrow +\infty$. \square

Неопределенности типа $\infty - \infty$

ПРИМЕР 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$.

Решение. Здесь в силу непрерывности многочлена

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^3) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0,$$

следовательно, слагаемые в скобках — бесконечно большие функции. В этой ситуации возможна неопределенность типа $\infty - \infty$ ¹⁾ (например, если одна из дробей стремится к $+\infty$ а другая — к $-\infty$), но мы не будем анализировать каждого из случаев отдельности, так как наша задача — найти предел их суммы. Приведем дроби под знаком предела к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = \frac{1+2}{1+1+1^2} = 1. \end{aligned}$$

Итак, исследуемая сумма дробей совпадает при $x \neq 1$ с рациональной функцией, непрерывной в точке 1, чём мы и воспользовались. \square

¹⁾ Поясним, что не всегда разность бесконечно больших функций порождает неопределенность. Например, если $f(x) \rightarrow +\infty$, а $g(x) \rightarrow -\infty$, то, очевидно, $f(x) - g(x) \rightarrow +\infty$.

ПРИМЕР 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt[3]{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$.

РЕШЕНИЕ. Под знаком предела стоит разность бесконечно больших функций. Поэтому, как и в предыдущем примере, возможна неопределенность типа $\infty - \infty$, но точный диагноз дать трудно.

Чтобы избежать громоздких выкладок с радикалами, сделаем замену переменной $t = \sqrt[6]{x}$. Тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, причем $t \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 1$. Затем мы упрощаем выражение под знаком предела, приводя дроби к общему знаменателю, и в конечном счете устраним неопределенность сокращением на $1 - t$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt[3]{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - t^3} - \frac{2}{1 - t^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + t - 2t^2}{(1 - t)(1 + t + t^2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1 - t)(1 + 2t)}{(1 - t)(1 + t + t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + 2t}{1 + t + t^2} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

В этом примере, делая замену переменных, мы опирались на теорему 3 из п. 2.13.

Задачи 1–2. Найти пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x - x^2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right);$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1 - x^n} - \frac{k}{1 - x^k} \right), \quad n, k \in \mathbb{N}.$

Односторонние пределы

УПРАЖНЕНИЕ 2.8.1. Сформулировать определение одностороннего предела $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ (см. рис. 14).

ОТВЕТ. Пусть функция $y = f(x)$ определена в правой полукрестности точки a . Функция $y = f(x)$ имеет предел b при $x \rightarrow a+0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ для всех $x \in O_\delta^+(a)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.8.2. Сформулировать определения бесконечных

односторонних пределов

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= -\infty; \end{aligned}$$

сделать соответствующие чертежи.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть функция $y = f(x)$ определена в левой полукрестности точки a . Тогда:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= +\infty, \text{ если для любого числа } h \text{ существует такое } \delta = \delta(h) > 0, \text{ что } f(x) > h \text{ при всех } x \in O_\delta^-(a) \text{ (рис. 56а);} \\ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) &= -\infty, \text{ если для любого числа } h \text{ существует такое } \delta = \delta(h) > 0, \text{ что } f(x) < h \text{ при всех } x \in O_\delta^-(a) \text{ (рис. 56б).} \end{aligned}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в правой полукрестности точки a . Тогда:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= +\infty, \text{ если для любого числа } h \text{ существует такое } \delta = \delta(h) > 0, \text{ что } f(x) > h \text{ при всех } x \in O_\delta^+(a) \text{ (рис. 56в);} \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= -\infty, \text{ если для любого числа } h \text{ существует такое } \delta = \delta(h) > 0, \text{ что } f(x) < h \text{ при всех } x \in O_\delta^+(a) \text{ (рис. 56г).} \end{aligned}$$

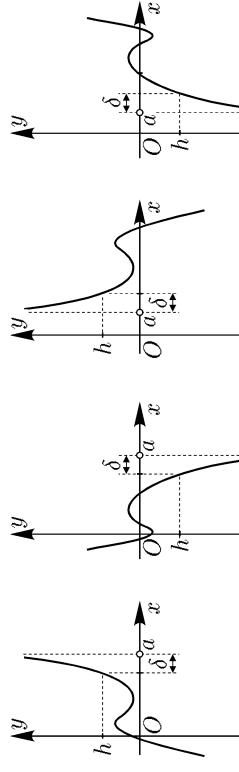


Рис. 56. Бесконечные односторонние пределы

УПРАЖНЕНИЕ 2.8.3. Показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= +\infty \iff \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad (3) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= -\infty \iff \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x). \quad (4) \end{aligned}$$

УКАЗАНИЕ. Это делается дословным повторением доказательства утверждения (5) в п. 2.8, только окрестность $O_\varepsilon(b)$ заменяется в первом случае окрестностью $O_h(+\infty)$, а во втором —

окрестностью $O_h(-\infty)$, где h задается произвольно. Проведите рассуждение самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8.4. Указать односторонние пределы в точке 0 функций $\operatorname{sgn} x$ и $1/x$ (см. рис. 3 и 12).

Решение. 1) $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$.

Действительно, в произвольной левой полукрестности точки 0 функция $\operatorname{sgn} x$ тождественно равна -1 , а предел постоянной есть сама эта постоянная. Аналогично проверяется второе равенство.

2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$. Тогда при $x \in (-\delta, 0)$ имеем

$$\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = h,$$

т.е. $1/x \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -0$.

Второе соотношение проверяется аналогично. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.8.5. Сформулировать определение непрерывности функции в точке a слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором полунаборе $(c, a]$. Она называется *непрерывной в точке a слева*, если предел слева в точке a этой функции существует и равен ее значению в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a).$$

Занятие 10

Теоретический материал: п. 2.12 (лекция 8).

Пределы на бесконечности

УПРАЖНЕНИЕ 2.12.1. Дать определения пределов

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

и сделать соответствующие чертежи.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности плюс бесконечности. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \text{ если для любого } \varepsilon > 0 \text{ найдется такое } t = t(\varepsilon),$$

что $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $x > t$ (см. рис. 57 а);

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ если для любого } t \text{ найдется такое } h = h(t),$$

что $f(x) > h$ при всех $x > t$ (см. рис. 57 б).

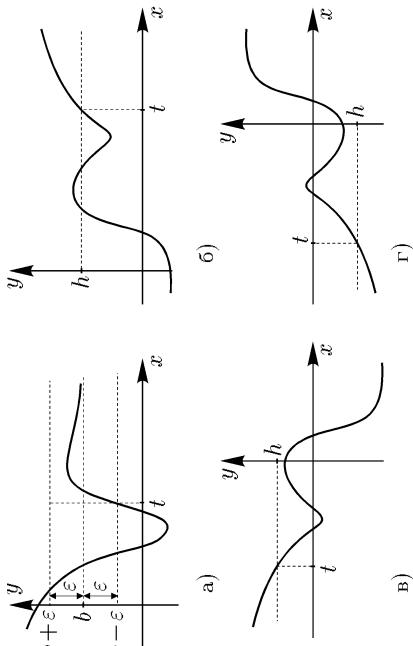


Рис. 57. Пределы на бесконечности

Пусть теперь функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности минус бесконечности. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \text{ если для любого } h \text{ найдется такое } t = t(h),$$

что $f(x) > h$ при всех $x < t$ (см. рис. 57 в);

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ если для любого } h \text{ найдется такое } t = t(h),$$

что $f(x) < h$ при всех $x < t$ (см. рис. 57 г).

ПРИМЕР 1. Проверить по определению, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $t = \sqrt{1/\varepsilon}$. Тогда при $x > t$

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon}} = \varepsilon. \quad \square$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ и $g(x) \geq m > 0$ в некоторой

окрестности плюс бесконечности. Проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

Решение. Возьмем произвольное $h > 0$. По определению предела, для $h_1 = h/m$ найдется такое t , что $f(x) > h_1$ при всех $x > t$. Можно считать, что $g(x) \geq m$ при этих x (в противном случае мы просто увеличим t). Тогда при $x > t$

$$f(x)g(x) > h_1m = h. \quad \square$$

ПРИМЕР 3. Доказать следующий вариант теоремы о пределе произведения. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m > 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$.

Решение. Заметим прежде всего, что в некоторой окрестности $O_{\delta_1}(a)$ справедливо неравенство $g(x) \geq m/2$ (почему?).

Далее рассуждения аналогичны рассуждениям из предыдущего примера.

Пусть сначала $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Возьмем произвольное $h > 0$. По определению бесконечного предела, для $h_1 = 2h/m$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что $f(x) > h_1$ при $x \in O_{\delta_2}(a)$. Тогда

$$f(x)g(x) > h_1 \frac{m}{2} = h \quad \text{при } x \in O_{\delta}(a),$$

где $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, то, взяв произвольное $h < 0$, найдем окрестность $O_{\delta_2}(a)$, для точек которой справедливо неравенство $f(x) < h_1 = 2h/m$. Тогда в меньшей из окрестностей $O_{\delta_1}, O_{\delta_2}$ справедливо неравенство $f(x)g(x) < h$. \square

ЗАДАЧА 1. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ и $g(x) \leq m < 0$ в некоторой окрестности $O(a)$. Проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty.$$

ЗАДАЧА 2. Пусть $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = m < 0$.

Доказать, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = \mp\infty$.

Ясно, что количества вариантов утверждений типа сформулированных в примерах 2 и 3 и задачах 1 и 2 велико и мы не сможем

здесь даже привести их все. В дальнейшем мы будем свободно использовать подобные утверждения, рассчитывая на то, что читатель легко восстановит соответствующую формулировку (и сумеет ее проверить).

Раскрытие неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty - \infty$.

ПРИМЕР 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-4}$.

Решение. Эта неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ раскрывается *делением числа на степень* и *изменением знака степеней*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) = 3.$$

Приведенный пример является частным случаем разбираемой в п. 4.12 задачи о вычислении предела рациональной функции при $x \rightarrow +\infty$.

ПРИМЕР 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^2+1}-\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3+4}}$.

Решение. Снова имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем «за скобки» старшую степень x в числителе и знаменателе:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^2+1}-\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3+4}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} \frac{2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4x^2}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4x^2}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1+\frac{4}{x^3}}} = 1 \cdot \frac{2-1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $|x|/x = 1$ при $x > 0$; поэтому $|x|/x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. \square

ПРИМЕР 6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^2+1}-\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3+4}}$.

Решение. Здесь годится подход из предыдущего примера. Нужно только заменить $+\infty$ на $-\infty$ и учесть, что $|x| = -x$ при

$x < 0$, так что $|x|/x \rightarrow -1$ при $x \rightarrow -\infty$ и поэтому конец выкладки выглядит так:

$$\dots = -1 \cdot \frac{2-1}{1} = -1. \quad \square$$

ПРИМЕР 7. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}}} \right)$.

РЕШЕНИЕ. Это неопределенность типа $\infty - \infty$. Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное, а затем вынесем «за скобки» в числителе и знаменателе старшую степень x :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x - x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} + 1} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ 3–7. Найти пределы $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Теоретический материал: пп. 2.9–2.11 (лекция 8).

Занятие 11
Исследование функций на непрерывность
и определение точек разрыва

УПРАЖНЕНИЕ 2.10.1. Сформулировать теорему для невозрастающей функции, аналогичную теореме 1 из п. 2.10.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(x)$ — невозрастающая функция на интервале (α, β) . Если она ограничена сверху числом c (п. е. $f(x) \leq c$), то она имеет в точке α предел справа, не превосходящий c :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) \leq c. \quad (1)$$

Аналогично, если она ограничена снизу числом d , то существует предел в точке β слева, не меньший d :

$$\lim_{x \rightarrow \beta-0} f(x) \geq d. \quad (2)$$

См. рис. 58.

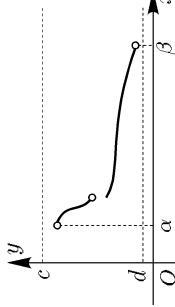


Рис. 58

ПРИМЕР 1. Исследовать на непрерывность, выяснить тип точек разрыва и схематически построить график функции $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть x .

РЕШЕНИЕ. Из определения целой части (см. с. 134) видно, что функция $f(x) = [x]$ постоянна на каждом полунитрале $[n, n+1]$: $f(x) = n$ при $x \in [n, n+1]$. Поэтому она непрерывна на $(n, n+1)$. В точке $x = n$ эта функция непрерывна справа: $f(n+0) = n = f(n)$. Предел слева в точке $x = n+1$ также равен n : $f(n+1-0) = n$. Таким образом, каждая точка $n \in \mathbb{Z}$ является точкой разрыва 1-го рода. Более точно, это точки скакача:

$$f(n-0) = n-1 < n = f(n+0).$$

Величина скакача $f(n+0) - f(n-0)$ равна 1. Функция является неубывающей на всей оси (см. рис. 59). \square

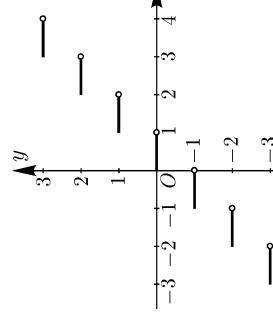


Рис. 59. Функция $y = [x]$

УПРАЖНЕНИЕ 2.11. Для функции

$$R(x) = \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}$$

указать значение $R(1)$, устраниющее разрыв в точке $x = 1$, и пределы $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} R(x)$.

Решение. Поясним, что речь идет о точках разрыва данной рациональной функции $R(x)$ (см. п. 2.11). При $x \neq 1$

$$R(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)},$$

причем функция, стоящая справа, непрерывна в точке $x = 1$. Положим

$$R(1) = \lim_{x \rightarrow 1} R(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{4}.$$

Теперь $R(x)$ непрерывна в точке 1.

Зададимся пределами $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} R(x)$. Функция $R(x)$ имеет вид

$$R(x) = \frac{\varphi(x)}{x+1},$$

где $\varphi(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ — непрерывная в точке $x = -1$ функция (на самом деле $\varphi(x)$ непрерывна на всей оси, но нам это не понадобится) и, значит, $\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) = \varphi(-1) = 1/2$. Ясно, что

$$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{1}{x+1} = \pm\infty$$

(проверьте!). Применив к произведению $\varphi(x) \cdot \frac{1}{x+1}$ утверждение из примера 3 предыдущего занятия, получаем ответ:

$$\lim_{x \rightarrow -1 - 0} R(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1 + 0} R(x) = +\infty. \quad \square$$

Отметим, что выражение $\frac{\varphi(x)}{x+1}$ при $x \rightarrow -1$ не является определенностью, так как $\lim_{x \rightarrow -1} \varphi(x) \neq 0$.

ПРИМЕР 2. Исследовать на непрерывность, выяснить тип точек разрыва и схематически построить график функции $R(x)$ из предыдущего примера.

Решение. Как отмечено выше, функция $R(x)$ является рациональной, и по теореме из п. 2.11 она определена и непрерывна всюду, где не обращается в 0 знаменатель, т. е. при всех $x \neq \pm 1$. Из результата предыдущего упражнения следует, что точка $x = 1$ является точкой устранимого разрыва, а точка $x = -1$ — точкой бесконечного разрыва.

Для построения графика отметим следующие детали: $R(0) = 1$, $R(x)$ не обращается в 0,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 1/x^3}{x(1 - 1/x^4)} = 0.$$

Теперь можно схематически построить график (см. рис. 60).

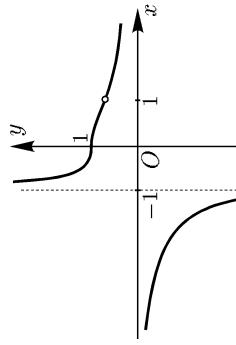


Рис. 60

ПРИМЕР 3. Исследовать на непрерывность, выяснить тип точек разрыва и схематически построить график функции

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x+x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Область определения функции — вся ось, кроме точки -1 . Функция непрерывна при $x \neq -1$ и $x \neq 0$, как отображение непрерывных функций. Точка $x = -1$ является точкой бесконечного разрыва: при $x < 0$, $x \neq -1$, имеем

$$f(x) = \frac{|x|}{x(1+x)} = \frac{-x}{x(1+x)} = -\frac{1}{1+x}; \quad (3)$$

поэтому

$$\lim_{x \rightarrow -1 - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1 + 0} f(x) = -\infty.$$

Из (3) видно, что

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} -\frac{1}{1+x} = -1.$$

При $x > 0$

$$f(x) = \frac{x}{x(1+x)} = \frac{1}{1+x},$$

значит,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Мы видим, что $x = 0$ является точкой скака: $f(-0) \neq f(+0)$.

Для построения графика отметим еще, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Теперь строим график (см. рис. 61).

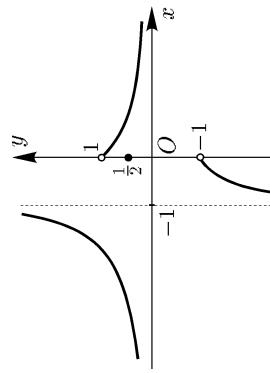


Рис. 61

ПРИМЕР 4. Исследовать на непрерывность, выяснить тип точек разрыва и схематически построить график функции $y = \frac{1}{\arcsin x}$.

Решение. Область определения функции $[-1, 0) \cup (0, 1]$. Функция непрерывна в области определения как элементарная; $f(-1) = -2/\pi$, $f(1) = 2/\pi$; функция нечетна.

Исследуем точку разрыва $x = 0$. Функция $\arcsin x$ непрерывна и обращается в 0 при $x = 0$, значит, $\arcsin x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm 0$. Кроме того, $\arcsin x < 0$ при $x \in [-1, 0)$ и $\arcsin x > 0$ при $x \in (0, 1]$. Значит, $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -0$ и $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +0$ (см. замечание в п. 2.7). Точка $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва. Теперь строим график (см. рис. 62).

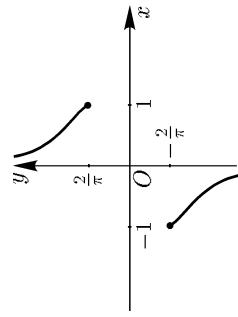


Рис. 62. Функция $y = \frac{1}{\arcsin x}$

ПРИМЕР 5. Исследовать на непрерывность, выяснить тип точек разрыва и схематически построить график функции

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}.$$

Решение. Область определения этой функции — вся ось, кроме точек $x = 0$ и $x = 1$, в которых обращаются в 0 знаменатели $1 - e^{\frac{x}{1-x}}$ и $1 - x$. В области определения эта функция непрерывна как элементарная функция (см. п. 4.10). Исследуем поведение функции в точках разрыва и на бесконечности.

Сначала рассмотрим функцию $g(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$.

В точке $x = 0$ эта функция определена и непрерывна как элементарная функция, значит, $g(x) \rightarrow g(0) = 1$ при $x \rightarrow 0$. Показатель $\frac{x}{1-x}$ экспоненты положителен при $x \in (0, 1)$ и отрицателен при $x < 0$. Значит, $1 - g(x) < 0$ в достаточно малой полукрестности $O^+(0)$ и $1 - g(x) > 0$ в полукрестности $O^-(0)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{1 - g(x)} = \left(\frac{1}{\mp 0} \right) = \mp \infty;$$

здесь запись в круглых скобках напоминает, что мы пользуемся замечанием из п. 2.7.

В точке $x = 1$ показатель $\frac{x}{1-x}$ экспоненты имеют бесконечный разрыв, причем

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1}{1-x} = \mp \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{x}{1-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{x}{1-x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$$

(мы воспользовались теоремой 4 о пределе сложной функции, см. п. 2.13). Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-g(x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-y} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1-g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1-y} = 1$$

(на этот раз мы воспользовались «односторонним» вариантом теоремы 3 из п. 2.13). Итак, в точке $x = 1$ функция имеет точку разрыва типа скачка.

Наконец,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{-1+1/x} = -1;$$

поэтому, используя вариант теоремы 2 из п. 2.13, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \mp 1} \frac{1}{1-e^t} = \frac{1}{1-e^{-1}}.$$

Теперь можно построить график (см. рис. 63б). \square

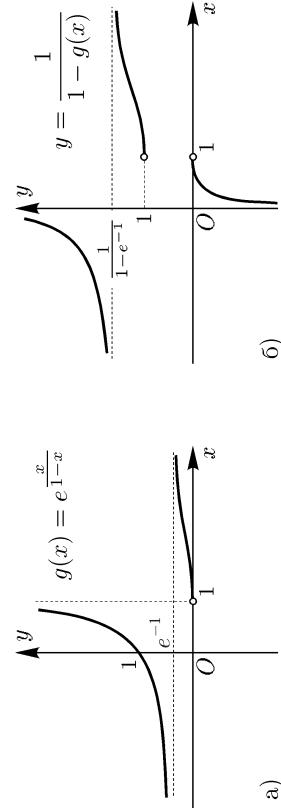


Рис. 63

Задачи 1–5. Д731а), б), в), б), 699, 718.

Занятие 12

Теоретический материал: пп. 4.5–4.8, 4.11, 4.12 (лекция 12–14).

Пределы, связанные со степенными, показательными и логарифмическими функциями

Сначала рассмотримся несколько примеров *пределов* вида $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ в случае, когда неопределенность не возникает. Затем мы переходим к вычислению *пределов, связанных с теоремой о втором замечательном пределе и ее следствиями*, т. е. к раскрытию неопределенностей типа 1^∞ .

Напомним, что функция $f(x)^{g(x)}$ ($f(x) > 0$) является сложной функцией и может быть записана в виде

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}. \quad (1)$$

Здесь внешняя функция e^y всюду непрерывна, и вычисление предела функции (1) сводится к вычислению предела ее логарифма:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x).$$

При этом

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = -\infty, \\ e^\alpha, & \text{если } -\infty < \alpha < +\infty, \\ +\infty, & \text{если } \alpha = +\infty. \end{cases} \quad (2)$$

В частности, если $g(x)$ имеет *конечный* предел c , а $f(x) — \kappa$ -очный пологоскользящий предел в при $x \rightarrow a$, то

$$f(x)^{g(x)} \rightarrow e^{c \ln b} = b^c. \quad (3)$$

Эти утверждения нетрудно обосновать, пользуясь различными вариантами теоремы о пределе сложной функции.

Мы могли бы рассмотреть в общем виде также и другие случаи (например, $b = +\infty$ и $0 \leq c < 1$). Но их число сравнительно велико, а, главное, бесмысленно пытаться запомнить все эти варианты. Универсальным ключом ко всем вычислениям здесь является формула (1).

ПРИМЕР 1. Найти предел

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

а) при $x \rightarrow +0$; б) при $x \rightarrow 1$; в) при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Сначала найдем пределы основания и показателя.

Затем, убедившись, что эти пределы конечны, а предел основания положителен, применим формулу (3).

- a) При $x \rightarrow +0$ имеем $\frac{1+x}{2+x} \rightarrow \frac{1}{2}$, $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \rightarrow 1$. Применяя формулу (3), получаем $L = (1/2)^1 = 1/2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $L = (2/3)^{1/2} = \sqrt{2/3}$.

- б) Наконец, при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2+x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{0}{-1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае $L = 1^0 = 1$. \square

ПРИМЕР 2. Найти предел

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty.$$

Формулу (3) в этом случае применить нельзя, но под знаком предела вновь нет неопределенности: $L = (1/2)^{+\infty} = 0$. Эта эвристическая выкладка дает правильный ответ и основана на формуле (2), где

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(\frac{x+2}{2x-1} \right).$$

Этот предел равен $-\infty$, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+2}{2x-1} \right) = \ln \frac{1}{2} < 0. \quad \square$$

Второй замечательный предел и его следствия

Теорема о втором замечательном пределе и следствия из этой теоремы (п. 4.11) вооружили нас формулами, которые мы здесь напомним:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (7)$$

ПРИМЕР 3. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x$ при всех значениях $k \in \mathbb{R}$.

Решение. Если $k \neq 0$, то имеем неопределенность типа 1^∞ . Раскрыть ее можно при помощи замены $t = k/x$:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x} \right)^{\frac{x}{k}} \right]^k = \lim_{t \rightarrow 0} [(1+t)^{\frac{1}{t}}]^k = e^k.$$

(Отметим, что функция x^k непрерывна в точке $x = e$ и можно воспользоваться одним из вариантов теоремы о пределе сложной функции.)

При $k = 0$ исходная функция под знаком предела равна 1, если $x \neq 0$, поскольку основание степени постоянно и равно 1. Поэтому $L = 1$ при $k = 0$. \square

Итак, для любого k

$$\text{ПРИМЕР 4. Найти предел } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Решение. Раскрывая эту неопределенность типа $\frac{0}{0}$, мы воспользуемся формулой (6):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad \square$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (6')$$

Это обобщение формулы (6).

ПРИМЕР 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 0$).

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, воспользуемся заменой $x \ln a = t$ и формулой (7):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \\ &= \ln a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln a. \quad \square \end{aligned}$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0). \quad (7')$$

Это обобщение формулы (7).

ПРИМЕР 6. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{x - 3}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Отметим, что под знаком логарифма здесь нет знакомого выражения «1+бесконечно малая». Но оно возникает *после преобразований*:

$$\log_3 x - 1 = \log_3 x - \log_3 3 = \log_3 \frac{x}{3} = \log_3 \left(1 + \frac{x-3}{3}\right).$$

Таким образом, можно воспользоваться формулой (6'):

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3(1 + \frac{1}{3}(x-3))}{x-3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3(1 + \frac{1}{3}(x-3))}{\frac{1}{3}(x-3)} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+t)}{t} = \frac{1}{3 \ln 3}. \quad \square \end{aligned}$$

Неопределенности типа 1^∞

ПРИМЕР 7. Найти предел $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n$.

Поясним, что здесь требуется найти предел последовательности при каждом значении x (а x выступает в роли параметра).

РЕШЕНИЕ. При каждом x мы имеем неопределенность типа 1^∞ . Представим основание в виде $1 + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность:

$$\frac{n+x}{n-1} = 1 + \alpha_n, \quad \text{где } \alpha_n = \frac{n+x}{n-1} - 1 = \frac{x+1}{n-1}.$$

Далее, при $x = -1$ имеем $\alpha_n \equiv 0$ и $L = 1$. При $x \neq -1$ последовательность α_n не обращается в 0; поэтому

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right\}^{\alpha_n n}$$

Здесь выражение в фигурных скобках стремится к e (см. формулу (5)), а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n n = n \frac{x+1}{n-1} = x+1,$$

так что

$$L = e^{x+1}. \quad \square$$

Описанный в этом примере (и в примере 3) прием раскрытия неопределенности типа 1^∞ имеет следующий недостаток: необходимо следить, чтобы бесконечно малая α_n не обращалась в 0 (при $n > n_0$), так как используется последовательность $1/\alpha_n$. Из-за этого, например, случай $x = -1$ нам пришлось рассматривать отдельно.

Другой подход к решению этого примера состоит в применении формулы (1) и раскрытии неопределенности в показателе при помощи замены функции (последовательности) на эквивалентную (см. п. 4.13):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1+\alpha_n)} = e^\alpha,$$

где при всех x , включая $x = -1$,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{x+1}{n-1} = x+1.$$

Прием замены функции на эквивалентную зачастую существенно упрощает вычисление пределов произведений и отношений; он станет одним из основных в нашем арсенале.

Как отмечается в лекциях, неопределенность типа 1^∞ можно свести к неопределенности типа $0 \cdot \infty$, поскольку $1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$. Для раскрытия неопределенности $\infty \cdot 0$ в показателе мы используем формулу (10') из п. 4.1.3:

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \quad (x \rightarrow a), \quad (9)$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

ПРИМЕР 8. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$.

Решение. Здесь после применения формулы для разности логарифмов применяется формула (9):

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{x} = 1. \quad \square$$

ПРИМЕР 9. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{1-2x}$.

Решение. Обратим прежде всего внимание на несколько непривычную запись функции под знаком предела. Разумеется, здесь имеется в виду функция $(1-2x)^{1/x}$. Основание стремится к 1 при $x \rightarrow 0$, показатель — бесконечно большая функция. Мы имеем неопределенность типа 1^∞ . Она легко раскрывается при помонии соотношения (9):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-2} = e^{-2}.$$

Поясним, что мы заменили сомножитель $\ln(1-2x)$ в показателе на эквивалентную при $x \rightarrow 0$ функцию $-2x$. \square

При решении следующего примера нам понадобится формула (14) из п. 4.1.3, точнее, ее обобщение с произвольной бесконечно малой $\alpha(x)$ вместо x :

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}. \quad (10)$$

ПРИМЕР 10. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{\cos \sqrt{x}}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, это неопределенность типа 1^∞ . Представим основание в виде $1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) =$

$\cos \sqrt{x} - 1$ — бесконечно малая при $x \rightarrow +0$. Далее, пользуясь соотношением (9), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+(\cos \sqrt{x}-1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}(\cos \sqrt{x}-1)}. \end{aligned}$$

Найдем предел показателя, пользуясь формулой (10) с $\alpha(x) = \sqrt{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2},$$

значит,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\cos \sqrt{x})^{1/x} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \quad \square$$

В следующем примере используется вытекающая из (7) формула (11') из п. 4.1.3:

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \quad (x \rightarrow a), \quad (11)$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

ПРИМЕР 11. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$$

Решение. Вновь имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Воспользуемся свойствами показательной функции, получим

$$\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \frac{a^x ((1+\frac{x}{a})^x - 1)}{x^2} = \frac{a^x (e^{x \ln(1+\frac{x}{a})} - 1)}{x^2}.$$

Здесь $a^x \rightarrow 1$, а $x \ln(1 + \frac{x}{a})$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow 0$. Воспользовавшись формулой (11), а затем формулой (9), получим следующую цепочку эквивалентных при $x \rightarrow 0$ функций:

$$\frac{a^x (e^{x \ln(1+\frac{x}{a})} - 1)}{x^2} \sim \frac{x \ln(1 + \frac{x}{a})}{x^2} = \frac{\ln(1 + \frac{x}{a})}{x} \sim \frac{x/a}{x} = \frac{1}{a}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \frac{1}{a}. \quad \square$$

ПРИМЕР 12. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Решение. Основание степени здесь стремится к 1 (по теореме о первом замечательном пределе). Показатель представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$, но мы не будем раскрывать ее, а сразу перейдем к показательной функции

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}$$

и воспользуемся формулой (9) для вычисления предела показателя: при $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x - \sin x} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right) &= \frac{\sin x}{x - \sin x} \ln \left(1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right) \\ &\sim \frac{\sin x}{x - \sin x} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = -\frac{\sin x}{x} \sim -1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$L = e^{-1}. \quad \square$$

Отметим, что в формулах (9)–(11) бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ можно заменить на бесконечно малую последовательность a_n . Доказывать заново модифицированные формулы нет необходимости, поскольку числовая последовательность a_n — частный случай функции¹⁾.

Задачи 1–10. Д508, 509, 517, 523, 528, 535, 542, 561а), 6), 563.

Занятия 13–14

Теоретический материал: лекции 8–16.

Эти занятия посвящены теоретическим задачам, сформулированным в лекциях 8–16. Пункты см. по номеру упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10.2. Проверить, что если $f(x)$ — неубывающая функция на (α, β) , не ограниченная сверху, то

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty.$$

¹⁾ Эта функция задана на множестве натуральных чисел, но ее можно отождествить с функцией, заданной на $[1, +\infty)$ посредством формулы $f(x) = a_{[x]}$, где $[x]$ — целая часть x .

Решение. Пусть h — произвольное число. Функция $f(x)$ — неограниченная на (α, β) ; поэтому существует такое $c \in (a, \beta)$, что $f(c) > h$. Тогда в силу монотонности $f(x)$ имеем $f(x) > f(c) > h$ для всех $x \in (c, \beta)$. Итак, для любого h существует $\delta = \beta - c$, такое, что $f(x) > h$ при $x \in O_\delta^-(\beta)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.12.2. Проверить, что если $f(x)$ не убывает на промежутке $[a, +\infty)$ и не ограничена сверху, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Проведите проверку самостоятельно, взяв за образец решение из предыдущего упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.13.

Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = c.$$

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = c$, существует такое число $t = t(\varepsilon)$, что $f(y) \in O_\varepsilon(c)$ при всех $y > t$. Далее, по определению предела $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, для этого t существует такое $\delta = \delta(t) > 0$, что $g(x) > t$ для всех $x \in O_\delta(a)$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(t(\varepsilon)) > 0$, что

$$x \in O_\delta(a) \implies g(x) > t \implies f(g(x)) \in O_\varepsilon(c),$$

т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Показать на примере, что в формулировке леммы Бореля отрезок $[a, b]$ нельзя заменить интервалом или полуинтервалом.

Решение. Рассмотрим, например, интервал $(0, 1)$. Он покрыт системой интервалов $I_n = \left(\frac{1}{n}, 1 \right)$, $n = 2, 3, \dots$, поскольку для любого $x \in (0, 1)$ существует такое n_0 , что $\frac{1}{n_0} < x$ и, значит, интервал $I_{n_0} = \left(\frac{1}{n_0}, 1 \right)$ содержит точку x .

Однако в любой конечной подсистеме I_{n_1}, \dots, I_{n_k} , найдется наибольший интервал I_N с $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, и тогда точки

полуинтервала $(0, \frac{1}{N}]$ не покрыты интервалами этой конечной подсистемы. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Показать, что интервал $(0, 1)$ не обладает свойством полноты.

Решение. Рассмотрим, например, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$. Ясно, что $a_n \in (0, 1)$. Последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, поскольку она сходится (см. п. 3.4). Но ее предел — точка 0 — не принадлежит интервалу $(0, 1)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.5.1. Доказать теорему о существовании нижней грани.

Теорема (о существовании нижней грани). Для любого непустого ограниченного снизу множества M существует его нижняя грань $\inf M$.

Доказательство. Выведем эту теорему из теоремы о существовании верхней грани.

Рассмотрим множество \widetilde{M} , состоящее из тех точек x , для которых $-x \in M$, т.е. $\widetilde{M} = \{x : -x \in M\}$. При этом, конечно, $M = \{x : -x \in \widetilde{M}\}$. Множества M и \widetilde{M} симметричны относительно точки 0 на числовой оси.

Проверим сначала, что M ограничено сверху. В самом деле, множество M ограничено снизу. Значит, существует такое C , что $x \geq C$ для всех $x \in M$. Для любой точки $x \in \widetilde{M}$ точка $-x$ лежит в M ; значит, $-x \geq C$ или, что то же, $x \leq -C$. Мы показали, что \widetilde{M} ограничено сверху числом $-C$.

По теореме 1 из п. 3.5 существует $b = \sup \widetilde{M}$. Докажем, что $\inf M = -b$. Для этого воспользуемся определением верхней грани.

- 1) Для любой точки $x \in M$ имеем $-x \in \widetilde{M}$, а, значит, $-x \leq b$ или, что то же, $x \geq -b$.
- 2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x \in \widetilde{M}$, что $b - \varepsilon < x \leq b$, или, что то же, $-b \leq -x < -b + \varepsilon$; при этом $-x \in M$.

Мы видим, что для числа $-b$ выполнены оба свойства из определения нижней грани. Значит, $-b = \inf M$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.5.2. Проверить, что если $\{a_n\}$ — неубывающая ограниченная сверху последовательность, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n.$$

Решение. Положим $b = \sup a_n$. Эта верхняя грань существует, поскольку множество чисел $\{a_n\}$ ограничено сверху. По определению верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется член последовательности a_{n_0} , такой, что $b - \varepsilon < a_{n_0} \leq b$. Так как последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая, то $a_n \geq a_{n_0}$ при всех $n \geq n_0$. Кроме того, из определения верхней грани имеем $a_n \leq b$ при всех n . Итак, $b - \varepsilon < a_n \leq b$ при всех $n \geq n_0$, так что по определению предела последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. \square

Проверьте аналогично, что если $\{a_n\}$ — невозраслающая ограниченная сверху последовательность, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n.$$

Упражнение 4.2. Доказать при помощи теоремы Коши о промежуточном значении, что если функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$ и $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$, то множество значений этой функции содержит промежуток $[f(a), +\infty)$.

Решение. Пусть $d > f(a)$. По определению предела существует $\delta > 0$, такое, что $f(x) > d$ при всех $x \in O_\delta^-(b)$ (см. рис. 64). Выберем произвольную точку $x_0 \in O_\delta^-(b)$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, x_0]$ и $f(a) < d < f(x_0)$. По теореме Коши существует точка $c \in [a, x_0]$, такая, что $f(c) = d$.

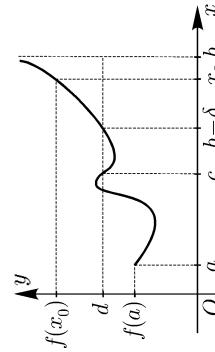


Рис. 64

Итак, любое число $d > f(a)$ входит в множество значений функции f . \square

Упражнение 4.3.1. Привести чертеж к следствию 2 из теоремы о непрерывной обратной функции (п. 4.3) для случая убывающей функции $f(x)$ и $c = +\infty$, $d = -\infty$. Вывести утверждение этого следствия из теоремы.

Решение. Сформулируем и проверим это следствие при указанных выше предположениях. Пусть $y = f(x) — убывающая непрерывная функция на интервале $(a, +\infty)$$, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(a) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Тогда эта функция имеет обратную функцию $x = g(y)$, определенную на всей оси; эта функция также является убывающей и непрерывной (см. рис. 65).

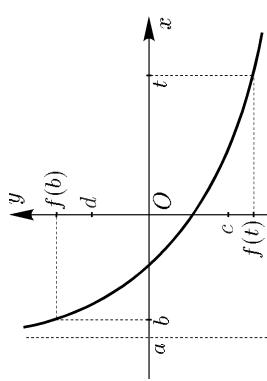


Рис. 65

Чтобы проверить это утверждение, возьмем произвольные числа b и t , такие, что $a < b < t$. По теореме о непрерывной обратной функции на отрезке $[f(t), f(b)]$ определена, непрерывна и убывает обратная функция $x = g(y)$.

Покажем, что обратная функция $x = g(y)$ определена, непрерывна и является убывающей на любом отрезке $[c, d]$ оси, а, значит, на всей оси. Действительно, выберем число $b > a$ настолько близким к a , а $t > b$ настолько большим, что $f(b) \geqslant d$ и $f(t) \leqslant c$. Это возможно, поскольку $\lim_{x \rightarrow a+0} f(a) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Тогда обратная функция определена, непрерывна и убывает на отрезке $[f(t), f(b)]$, включающем в себя $[c, d]$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.3.3. Показать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$, то условие ее строгой монотонности необходимо для существования обратной функции.

Решение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$ и обратима. Требуется доказать, что она монотонна.

Пусть для определенности промежуток $\langle a, b \rangle$ является отрезком $[a, b]$. Заметим прежде всего, что по определению обратимости, $f(a) \neq f(b)$.

Пусть $f(a) < f(b)$. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Действительно, если это не так, то найдутся такие точки $x_1 < x_2$ на $[a, b]$, что $f(x_1) > f(x_2)$ (как мы только что отметили, ситуация $f(x_1) = f(x_2)$ исключена). Далее есть две возможности:

- $f(a) > f(x_2)$ и 6) $f(x_2) > f(a)$ (см. рис. 66).

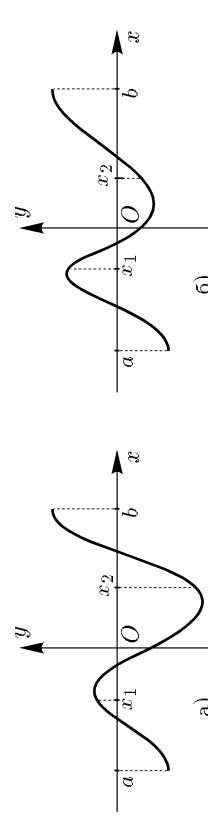


Рис. 66

Обе противоречат теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции: если $f(a) > f(x_2)$, то на отрезке $[x_2, b]$ члено $f(a)$ является промежуточным значением для $f(x)$, но $f(x) \neq f(a)$ для всех $x \neq a$; если же $f(x_2) > f(a)$, то на отрезке $[a, x_1]$ члено $f(x_2)$ является промежуточным значением для $f(x)$, но $f(x) \neq f(x_2)$ для всех $x \neq x_2$.

Следует $f(a) > f(b)$ легко свести к разобранному, если рассмотреть функцию $y = -f(x)$.

Наконец, нетрудно понять, что если функция строго монотонна на любом отрезке промежутка $\langle a, b \rangle$, то она строго монотонна на всем промежутке. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Проверить соотношения

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= +\infty, & \text{если } a > 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= 0, & \text{если } 0 < a < 1.\end{aligned}$$

Решение. Пусть сначала $a > 1$. Функция a^x не ограничена на оси, поскольку не ограничена последовательность a^n (см. пример 4 из занятия 3). Эта функция возрастает и, значит, стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ (см. упражнение 2.12.2).

Далее, сделав замену $y = -x$, при помощи теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями получим

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} a^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^y} = 0.$$

Наконец, если $0 < a < 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = +\infty. \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.14.1. Привести примеры функций на отрезке: 1) не ограниченной на нем; 2) ограниченной, но не достигающей верхней и нижней граней своих значений на этом отрезке.

РЕШЕНИЕ. Например, таковы функции

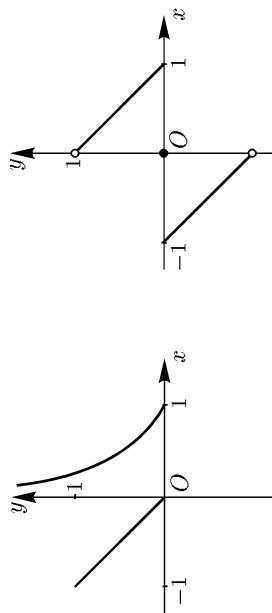


Рис. 67

$$y = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1/x - 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad y = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x + 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

заданные на отрезке $[-1, 1]$. Разумеется, каждая из этих двух функций имеет точку разрыва на этом отрезке. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.14.2. Привести примеры непрерывных функций на интервале с множеством значений, являющимся 1) интервалом, 2) отрезком.

РЕШЕНИЕ. В качестве первого примера, конечно, годится функция $y = x$, определенная на любом интервале. В этом случае область значений — тот же интервал.

Второй пример: $y = \sin x$ на любом интервале, содержащем точки $-\pi/2$ и $\pi/2$ (например, на $(-\pi, \pi)$ или на всей оси). Множество значений — отрезок $[-1, 1]$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.15.1. Проверить равномерную непрерывность функции $1/x$ на $[a, +\infty)$ при любом $a > 0$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Положим $\delta = a^2\varepsilon$. Тогда для любых $x_1, x_2 \geq a$, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, имеем

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \frac{\delta}{a^2} = \varepsilon. \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 4.15.2. Проверить, что функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на любом конечном промежутке, но не является равномерно непрерывной на бесконечных промежутках, например, на всей оси.

РЕШЕНИЕ. Функция $y = x^2$ непрерывна и по теореме Кантора равномерно непрерывна на любом отрезке, следовательно (см. замечание 4 в п. 4.15), она равномерно непрерывна на любом конечном промежутке.

Пусть теперь, скажем, $\varepsilon = 1$. Рассмотрим точки x_1 и x_2 , связанные друг с другом соотношением $x_2 = x_1 + \delta/2$, где $\delta > 0$. Имеем $|x_2 - x_1| = \delta/2 < \delta$. Кроме того, если $x_1 > 0$, то

$$|x_2^2 - x_1^2| = \left(x_1 + \frac{\delta}{2} \right)^2 - x_1^2 = x_1 \delta + \frac{\delta^2}{4} > x_1 \delta.$$

Поэтому при $x_1 > 1/\delta$ имеем $|x_1 - x_2| < \delta$, но $|x_1^2 - x_2^2| > 1$. Здесь $\delta > 0$ произвольно, поэтому функция x^2 не является равномерно непрерывной на всей оси.

Из приведенного рассуждения видно также, что x^2 не является равномерно непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$ ни при каком a . \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.15.3. Пусть $f(x)$ равномерно непрерывна на полуинтервалах $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$. Доказать, что $f(x)$ равномерно непрерывна на всей оси.

РЕШЕНИЕ. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$, такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1 \quad \text{при } x_1, x_2 \in (-\infty, 0], \quad |x_1 - x_2| < \delta_1.$$

Аналогично существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1)$, такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1 \quad \text{при } x_1, x_2 \in [0, +\infty), \quad |x_1 - x_2| < \delta_2.$$

Пусть теперь $x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 0$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, где $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $|x_1 - 0| < \delta$, $|0 - x_2| < \delta$ и, значит,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(0)| + |f(0) - f(x_2)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Итак, при любых x_1, x_2 , таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.15.4. Проверить, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$, то она равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

Решение. Пусть $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow +\infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ по определению предела существует такое $t > a$, что $|f(x) - b| < \varepsilon_1$ при всех $x \geq t$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - b| + |b - f(x_2)| < 2\varepsilon_1$$

для любых $x_1, x_2 \geq t$.

На отрезке $[a, t]$ функция $f(x)$ непрерывна и, значит, равномерно непрерывна; поэтому существует $\delta > 0$, такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1 \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in [a, t].$$

Теперь действуем, как в предыдущем решении. Пусть $x_1 \in [a, t]$, $x_2 \geq t$ и $|x_1 - x_2| < \delta$. Тогда $|x_1 - t| < \delta$ и, значит,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(t)| + |f(t) - f(x_2)| < \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Итак, для любых $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ имеем $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ при условии $|x_1 - x_2| < \delta$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.17. Показать, что функция $f(x) = e^{zx}$ непрерывна при любом комплексном z , и проверить соотношение

$$e^{z_1 x} e^{z_2 x} = e^{(z_1 + z_2)x}.$$

Решение. Вспомогательная и мнимая части функции e^{zx} ,

$$\operatorname{Re} e^{zx} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} e^{zx} = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

являются элементарными функциями, определенными на всей оси. Отсюда следует их непрерывность и, значит, непрерывность функции e^{zx} .

Остается проверить выписанное соотношение:

$$\begin{aligned} e^{z_1 x} e^{z_2 x} &= e^{\alpha_1 x} (\cos \beta_1 x + i \sin \beta_1 x) e^{\alpha_2 x} (\cos \beta_2 x + i \sin \beta_2 x) \\ &= e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} ((\cos \beta_1 x \cos \beta_2 x - \sin \beta_1 x \sin \beta_2 x) \\ &\quad + i(\sin \beta_1 x \cos \beta_2 x + \cos \beta_1 x \sin \beta_2 x)) \\ &= e^{((\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2))x} = e^{(z_1 + z_2)x}. \end{aligned} \quad \square$$

Итак, при любых x_1, x_2 , таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.15.4. Проверить, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$, то она равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

Использование эквивалентности функций при вычислении пределов

На занятии 12 мы уже применяли понятие эквивалентных функций при вычислении пределов. Напомним, что при вычислении пределов произведений и отношений функций можно заменять эти функции и им эквивалентными (см. предложение в п. 4.13).

ПРИМЕР 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}(x/2)}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку $2x$ и $x/2$ — бесконечно малые при $x \rightarrow 0$, в силу формул (8) и (9) из п. 4.13 имеем

$$\sin 2x \sim 2x, \quad \operatorname{tg}(x/2) \sim x/2 \quad (x \rightarrow 0).$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x/2} = 4. \quad \square$$

Добавим к формуле (8) — (11') из п. 4.13 еще несколько полезных соотношений такого же типа.

Если в формулу (8) из п. 4.13 подставить $\alpha(x) = \arcsin x$, то получается асимптотическая формула

$$\arcsin x \sim x \quad (x \rightarrow 0).$$

Из нее нетрудно получить ее обобщенный вариант

$$\boxed{\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)}, \quad (1)$$

где $\alpha(x)$ — уже произвольная бесконечно малая функция. Аналогично из формулы (9) получается формула

$$\boxed{\arctg \alpha(x) \sim \alpha(x)}. \quad (2)$$

Из результата примера 2 из занятия 8 вытекает, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n} \quad (x \rightarrow 0)}. \quad (3)$$

В следующем примере эта формула обобщается.

ПРИМЕР 2. Проверить, что для любого действительного числа ε справедлива асимптотическая формула

$$(1+x)^\varepsilon - 1 \sim \varepsilon x \quad (x \rightarrow 0).$$

РЕШЕНИЕ. В самом деле, $(1+x)^\varepsilon - 1 = e^{\varepsilon \ln(1+x)} - 1$, где функция $\varepsilon \ln(1+x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$. Остается воспользоваться формулами (11) и (10) из п. 4.13:

$$(1+x)^\varepsilon - 1 = e^{\varepsilon \ln(1+x)} - 1 \sim \varepsilon \ln(1+x) \sim \varepsilon x. \quad \square$$

Доказанную формулу и ее обобщение

$$(1 + \alpha(x))^\varepsilon - 1 \sim \varepsilon \alpha(x) \quad (4)$$

с произвольной бесконечно малой функцией $\alpha(x)$ следует запомнить.

ПРИМЕР 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Здесь в знаменателе гордится уже знакомая конструкция $\ln(1+x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$). В числителе можно получить выражение вида $a^x - 1$, чтобы воспользоваться формулой (7) из занятия 12. Для этого, например, можно вынести за скобку 3 x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x((\frac{2}{3})^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{2}{3})^x - 1}{x} = \ln \frac{2}{3}. \quad \square$$

ПРИМЕР 4. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$.

РЕШЕНИЕ. Под знаком предела неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Имеем

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2/2}{(\sqrt{x})^2/2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x = 0. \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой (10) из занятия 12. \square

Обычно при вычислении пределов замену функций эквивалентными приходится комбинировать с применением других формул.

ПРИМЕР 5. Найти предел

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tg(\frac{\pi}{4} + ax)}{\sin bx}, \quad b \neq 0.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь под знаком предела — неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Знаменатель можно сразу заменить эквивалентным ему выражением bx . В числите, заметив, что аргумент логарифма стремится к 1, представим этот аргумент в виде $1 + \alpha(x)$ и воспользуемся формулой $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\tg(\frac{\pi}{4} + ax) - 1))}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg(\frac{\pi}{4} + ax) - 1}{bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg(\frac{\pi}{4} + ax) - \tg \frac{\pi}{4}}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{bx \cos(\frac{\pi}{4} + ax) \cos \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{bx \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{2a}{b}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой для разности тангенсов:

$$\tg \alpha - \tg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad \square$$

ПРИМЕР 6. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

РЕШЕНИЕ. Раскрываем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Здесь выражения под знаком логарифма в числителе и знаменателе стремятся к единице и, значит, имеют вид $1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x + \sqrt{1 + x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1 + \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}}. \end{aligned}$$

Здесь в силу формулы (3) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Таким образом, $L = 1$. \square

ПРИМЕР 7. Найти предел $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$, $x > 0$.

РЕШЕНИЕ. Здесь имеем неопределенность типа $\infty \cdot 0$. Вычисление этого предела в конструированном итоге сводится к применению асимптотической формулы $e^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n$ ($\alpha_n \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{\frac{\ln x}{n}} - e^{\frac{\ln x}{n+1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{\frac{\ln x}{n+1}} \left(e^{\frac{\ln x}{n(n+1)}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{\frac{\ln x}{n(n+1)}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{\ln x}{n(n+1)} = \ln x. \quad \square \end{aligned}$$

В двух следующих примерах мы воспользуемся формулой (4).

ПРИМЕР 8. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$.

РЕШЕНИЕ. Это неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Здесь в числителе под каждым из корней нет характерной конструкции $1 + \alpha(x)$, но ее нетрудно получить, если вынести за скобки 3:

$$\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x} = 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{x}{27}} - \sqrt[3]{1 - \frac{x}{27}} \right).$$

Далее, чтобы воспользоваться формулой (4), можно от каждого корня отнять 1:

$$3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{x}{27}} - \sqrt[3]{1 - \frac{x}{27}} \right) = 3 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{x}{27}} - 1 \right) - 3 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{x}{27}} - 1 \right).$$

Однако заменять на эквивалентную функцию каждое из выражений в скобках *незаконно* (разберитесь, почему!); поэтому предварительно мы разобьем функцию под знаком предела на два слагаемых и, пользуясь формулой (4), найдем предел *каждого слагаемого по отдельности*. Итак,

$$\begin{aligned} L &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{27}} - 1}{x + 2\sqrt[3]{x^4}} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{x}{27}} - 1}{x + 2\sqrt[3]{x^4}} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3 \cdot 27}}{x(1 + 2\sqrt[3]{x})} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{3 \cdot 27}}{x(1 + 2\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}. \quad \square \end{aligned}$$

Отметим, что в этом примере, пользуясь формулой для предела суммы, мы заранее не знали, существуют ли эти пределы и

являются ли они конечными. Дальнейшие вычисления показали существование и конечность этих пределов и сделали обоснованным применение упомянутой формулы.

ПРИМЕР 9. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt[3]{x^3 - x})$.

РЕШЕНИЕ. В этом примере имеем неопределенность типа $\infty - \infty$ (убедитесь в этом). Как обычно, попытаемся создать под знаком корня конструкцию $1 + \alpha(x)$. Здесь этого можно добиться, вынеся за знак корня старшую степень x . Дальнейшие выкладки показаны на выкладки из предыдущего примера и завершаются вновь применением формулы (4):

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| \sqrt{1 - 2x^{-1}} + x \sqrt[3]{1 - x^{-2}}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x \sqrt{1 - 2x^{-1}} + x - x + x \sqrt[3]{1 - x^{-2}}) \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 - 2x^{-1}} - 1}{x^{-1}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^{-2}} - 1}{x^{-1}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{2}2x^{-1}}{x^{-1}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{3}x^{-2}}{x^{-1}} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{3x} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

ПРИМЕР 10. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 3} - 1}{\sqrt{x+6} - 2}$.

РЕШЕНИЕ. Установив тип неопределенности $(\frac{0}{0})$, видим, что числитель дроби имеет такую же структуру, как левая часть формулы (4):

$\sqrt[3]{x^2 - 3} - 1 = \sqrt[3]{1 + (x^2 - 4)} - 1$, где $x^2 - 4 \rightarrow 0$, а знаменатель приобретает нужный вид после вынесения за скобку множителя 2:

$$\sqrt{x+6} - 2 = 2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{x+2}{4}} - 1 \right), \text{ где } \frac{x+2}{4} \rightarrow 0.$$

Следовательно, в силу формулы (4) (при $\varepsilon = 1/2$ и $\varepsilon = 1/3$)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{3}(x^2 - 4)}{\frac{1}{2}x + 2} = \frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -\frac{16}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Заметим, что выделить бесконечно малые при $x \rightarrow a$ (где $a \neq \pm\infty$) обычно бывает легче, если предварительно сделать замену

$x - a = t$. После замены имеем $t \rightarrow 0$ и бесконечно малые видны «невооруженным глазом».

Так, в предыдущем примере после замены $x + 2 = t$ имеем:

$$\frac{\sqrt[3]{1+t^2-4t}-1}{\sqrt{4+t}-2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[3]{1+t^2-4t}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}t}-1} \sim \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}(t^2-4t)}{\frac{1}{8}t} \quad (t \rightarrow 0).$$

Принципиальных упрощений, однако, эта замена не влечет.

$$\text{ПРИМЕР 11. Найти предел } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - \sqrt{1+x}}{\arctg x}.$$

Решение. Это неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Сразу ясно что делать со знаменателем (см. формулу (2)). В числителе после вычитания и добавления 1 появляется возможность применить формулу (11) из занятия 1.2 и формулу (3) (но не раньше, чем предел будет представлен в виде суммы пределов):

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln 3 \cdot \sin x} - 1 - (\sqrt{1+x} - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln 3 \cdot \sin x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 \cdot \sin x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{ПРИМЕР 12. Найти предел } L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \quad a > 0.$$

Решение. Это неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Вынесем за скобку в числителе a^α :

$$x^\alpha - a^\alpha = a^\alpha((x/a)^\alpha - 1).$$

Здесь $x/a \rightarrow 1$ при $x \rightarrow a$. Значит, можно применить формулу (4):

$$x^\alpha - a^\alpha = a^\alpha \left(\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)^\alpha - 1 \right) \sim a^\alpha \alpha \frac{x-a}{a} \quad (x \rightarrow a).$$

Преобразовав аналогичным способом знаменатель, получим

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^\alpha \alpha \frac{x-a}{a}}{a^\beta \beta \frac{x-a}{a}} = \frac{\alpha a^\alpha}{\beta a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}. \quad \square$$

ЗАДАЧИ 1–10. Д448, 449, 452, 499, 502, 539, 549, 554, 555, 558.

Занятие 16

Теоретический материал: пл. 2.13, 4.12, 4.13 (лекции 9, 14, 15). На этом занятии мы продолжим вычисления с использованием эквивалентных функций.

ПРИМЕР 1. Проверить, что $\ln x \sim x - 1$ при $x \rightarrow 1$.

РЕШЕНИЕ. Действительно, $\ln x = \ln(1 + (x - 1))$, где $x - 1$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$. Поэтому $\ln(1 + (x - 1)) \sim x - 1$ ($x \rightarrow 1$). \square

ПРИМЕР 2. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{x - e}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку $\ln x - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow e$, имеем

$$\ln \ln x = \ln(1 + (\ln x - 1)) \sim \ln x - 1 = \ln \frac{x}{e} \quad (x \rightarrow e).$$

Далее, $\frac{x}{e} - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow e$; поэтому

$$\ln \frac{x}{e} = \ln \left(1 + \left(\frac{x}{e} - 1 \right) \right) \sim \frac{x}{e} - 1 \quad (x \rightarrow e).$$

В итоге имеем

$$L = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \frac{1}{e}. \quad \square$$

В рассмотренных здесь и на предыдущих занятиях примерах мы заменили функции на эквивалентные, пытаясь упростить выражение под знаком предела. Напомним, что такая замена правомерна лишь в случаях, когда выражение под знаком предела представляет собой произведение $f(x)g(x)$ или отношение $f(x)/g(x)$ и заменяется одна из функций $f(x)$, $g(x)$ или обе одновременно (см. предложение в п. 4.13).

ПРИМЕР 3. Найти ошибку в рассуждении:

Предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)}{x}$ равен 0,
так как $\sqrt{x^2+x} \sim x$ при $x \rightarrow +\infty$.

РЕШЕНИЕ. Действительно, $\sqrt{x^2+x} \sim x$ при $x \rightarrow +\infty$, так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Однако выражение под знаком предела является алгебраической суммой и замена первого слагаемого на эквивалентную функцию не обоснована и в данном случае ведет к ошибке. Согласно замечанию 2 из п. 4.1.3 соотношение $\sqrt{x^2 + x} \sim x$ ($x \rightarrow +\infty$) эквивалентно соотношению

$$\sqrt{x^2 + x} - x = o(x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Ясно, что этой информации недостаточно, чтобы найти предел.

Этот предел можно найти, воспользовавшись *домножением и делением на сопряженное выражение*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + x^{-1}} + 1} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Проверить, что

a) $x^3 - 4x \sim 8(x - 2)$ ($x \rightarrow 2$).

б) $(x - x_0)^\alpha \varphi(x) \sim (x - x_0)^\alpha \varphi(x_0)$ ($x \rightarrow x_0$), если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , причем $\varphi(x_0) \neq 0$.

Решение. В этих задачах показываем, что предел отношения соответствующих функций равен 1:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{8(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)(x + 2)}{8(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x + 2)}{8} = \frac{8}{8} = 1. \quad \square$

б) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^\alpha \varphi(x)}{(x - x_0)^\alpha \varphi(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} = 1. \quad \square$

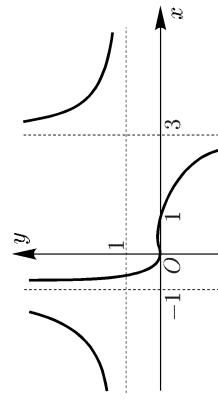
ПРИМЕР 5. Построить график функции $y = \frac{x^2(x - 1)}{(x + 1)^2(x - 3)}$.

Решение. Область определения функции — вся числовая ось, кроме точек -1 и 3 . Функция обращается в 0 в точках 0 и 1 . Интервалы, на которых функция сохраняет знак:

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & + & + \\ \hline -1 & 0 & 1 & 3 & & & \end{array}$$

Функция не является ни четной ни нечетной и не является периодической. Это рациональная функция, поэтому она непрерывна в области определения.

Используя пример 4б), мы можем уточнить поведение функции около точек разрыва и около ее нулей.



Теперь можно нарисовать график (см. рис. 68).

Рис. 68

Заметим функцию $f(x)$ на эквивалентную, нужно иметь в виду следующее простое соображение (ср. замечание 2 в п. 4.13): если $f = f_1 + f_2$ и $f_2(x) = o(f_1(x))$ (при $x \rightarrow a$), то $f(x) \sim f_1(x)$ (при $x \rightarrow a$). Здесь слагаемое $f_1(x)$ является старшим или главным членом (при $x \rightarrow a$) в сумме $f_1(x) + f_2(x)$. Аналогичное правило справедливо для любого числа слагаемых: если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

где $f_1(x)$ — старший член, т.е. $f_k(x) = o(f_1(x))$, $k = 2, \dots, n$, при $x \rightarrow a$, то

$$f(x) \sim f_1(x) \quad (x \rightarrow a).$$

Иными словами, при переходе к эквивалентной функции *главные слагаемые можно опустить*.

В частности, в произвольной линейной комбинации степенных функций

$$f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_n x^{\alpha_n},$$

где α_i — произвольные действительные попарно различные числа, *старшим членом при $x \rightarrow 0$ является слагаемое с минимальным показателем*, а при $x \rightarrow \pm\infty$ — с максимальным.

Например,

$$\begin{aligned} & x^3 + 2x \sim 2x \quad (x \rightarrow 0), \\ & -\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + 4x + x^2 \sim -\sqrt[3]{x} \quad (x \rightarrow 0), \\ & -x^6 + 2x^2 - \sqrt{x} + 1 \sim -x^6 \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Следует также запомнить следующую «шпаргалку» бесконечно больших функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\boxed{\log_a x \prec x^\alpha \prec b^x, \quad x \rightarrow +\infty, \quad a > 1, \quad b > 1. \quad (2)}$$

Здесь x^α «растет быстрее», чем $\log_a x$, а b^x «растет быстрее», чем x^α при $x \rightarrow +\infty$ (см. об этом подробнее в п. 4.12).

$$\text{ПРИМЕР 6. Найти предел } L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{15}(3x-1)^{31}}{(x^2+13x+4)^{23}}.$$

Решение. Каждый сомножитель заменяем эквивалентным:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)^{15}(3x)^{31}}{(x^2)^{23}} = 2^{15}3^{31}$$

(ср. вычисление предела рациональной функции в п. 4.12). \square

ПРИМЕР 7. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3 + 2^x}{1 - x + 3^x}$.

Решение. Пользуясь шкалой (2), опускаем в числителе и знаменателе *главные слагаемые*:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x} = 0. \quad \square$$

ПРИМЕР 8. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$.

Решение. В этом примере, разумеется, нельзя сразу воспользоваться тем, что $x^2 + e^x \sim e^x$ и $x^4 + e^{2x} \sim e^{2x}$ при $x \rightarrow +\infty$ (хотя это и приведет к правильному ответу), так как соответствующие функции стоят под знаком логарифма. Поэтому выражения несколько усложняются. Сначала нужно в каждом из выражений под знаком логарифма вынести за скобки старшее слагаемое:

$$\frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \frac{\ln e^x + \ln(1 + x^2/e^x)}{\ln e^{2x} + \ln(1 + x^4/e^{2x})} = \frac{x + \ln(1 + x^2/e^x)}{2x + \ln(1 + x^4/e^{2x})}.$$

Здесь (см. шкалу (2)) $x^2/e^x \rightarrow 0$, $x^4/e^{2x} \rightarrow 0$ и, значит,

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + o(1)}{2x + o(1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

ПРИМЕР 9. Найти предел $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$.

Решение. Отличие от предыдущего примера состоит в том, что при $x \rightarrow -\infty$ меняются роли явл. слагаемые под знаком логарифма. Старшими становятся x^2 и x^4 . Поэтому

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(1 + e^x/x^2)}{\ln x^4 + \ln(1 + e^{2x}/x^4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x| + \ln(1 + e^x/x^2)}{4 \ln|x| + \ln(1 + e^{2x}/x^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x| + o(1)}{4 \ln|x| + o(1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x|}{4 \ln|x|} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

ПРИМЕР 10*. Построить график функции

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \arctg x^n.$$

Решение. Ясно, что $f(1) = 0$. При $x \neq 1$ имеем

$$f(x) = (x-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg x^n.$$

Далее, при $x > 1$ имеем $x^n \rightarrow +\infty$; поэтому в силу теоремы из п. 2.14

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg x^n = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg y = \frac{\pi}{2}.$$

При $|x| < 1$ имеем $x^n \rightarrow 0$ и в силу той же теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg x^n = \lim_{y \rightarrow 0} \arctg y = \arctg 0 = 0.$$

При $x \leq -1$ последовательность $\{x^n\}$ не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного); поэтому нельзя воспользоваться ни одной из теорем пп. 2.13–2.14. Покажем, что при $x \leq 1$ последовательность $a_n = \arctg x^n$ расходится (и, следовательно, функция $f(x)$ не определена при таких x). В самом деле, подпоследовательности a_{2k} и a_{2k+1} имеют разные пределы: при $x < -1$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = \arctg x^{2k} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} = \arctg x^{2k+1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctg y = -\frac{\pi}{2},$$

а при $x = -1$ имеем $a_{2k} \equiv \arctg 1 = \pi/4$, $a_{2k+1} \equiv \arctg(-1) = -\pi/4$.

Итак, исследуемая функция определена на интервале $(-1, +\infty)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Теперь нетрудно изобразить график этой функции (см. рис. 69).

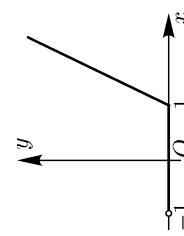


Рис. 69

ПРИМЕР 11*. Построить график функции

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}.$$

Решение. Обозначим e^{x+1} через t и найдем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + t^n} \quad (t > 0).$$

Рассмотрим отдельно случаи $0 < t \leq 1$ (т. е. $-\infty < x \leq -1$) и $t > 1$ (т. е. $x > -1$). При $0 < t \leq 1$ имеем $1 < \sqrt[n]{1+t^n} \leq \sqrt[1]{2}$. Здесь $\sqrt[1]{2} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ (см. формулу (4) из п. 4.6) и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + t^n} = 1 \quad \text{при } 0 < t \leq 1.$$

При $t > 1$ последовательность t^{-n} является бесконечно малой; поэтому

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + t^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t \sqrt[n]{t^{-n} + 1} = t \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[t^{-n} + 1]{} = t \cdot 1 = t.$$

Итак,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq -1, \\ e^{x+1}, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

Теперь можно нарисовать график этой функции (см. рис. 70).

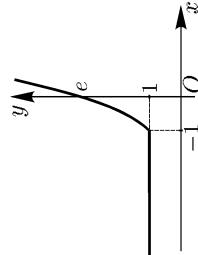


Рис. 70

ЗАДАЧИ 1–6. Д415, 562, 593а), 6), 617, 621.

Занятие 17

Контрольная работа №2

Найти пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x-7} + 2\sqrt[3]{x+2}}{x^2 + 5x + 4};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[3]{x^2 - x^3});$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{\operatorname{tg} \pi x};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - \sin x)^{\operatorname{ctg} x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arctg}(x/2)}{2^x - \cos 2\sqrt{x}}.$

Исследовать функцию на непрерывность, указать характер разрывов и построить график:

$$6) y = e^{\frac{x-1}{x-2}}; \quad 7) y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1|}.$$

Приложение (избранные задачи)

В этом разделе мы приводим упомянутые в тексте книги задачи из задания Б. П. Демидовича, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Построить графики функций:

260. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}.$
269. $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (гипербола).
305. $y = e^x \cos x.$
315. $y = \arcsin \frac{1}{x}.$
- 324.1. в) $y = \frac{x^2}{|x|-1};$ ж) $y = \frac{1}{1-2\frac{|x|}{1-x}};$ л) $y = \log \cos x \sin x.$
- Найти значения следующих выражений:
411. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$
412. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.$
413. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$
415. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$
416. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$
417. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$
418. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$
420. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$
422. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$
425. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m и n — натуральные числа).

426. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}$ (n — натуральное число).

427. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ (n — натуральное число).

Найти пределы:

437. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$

439. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ($a > 0$).

440. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$

442. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$

448. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$

449. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[7]{x+2}-\sqrt[7]{x+20}}{\sqrt[7]{x+9}-2}.$

452. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m и n — целые числа).

457. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x).$

466. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

475. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$

479. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

483. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$

499. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$

508. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$

517. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

528. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$ 535. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}.$ 539. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ux}{\ln \cos bx}.$

542. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$ ($a > 0$). 549. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$ ($a > 0$).

554. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a - 1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$ ($a > 0$, $b > 0$).

555. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$ ($a > 0$, $b > 0$).

558. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{1/x}$ ($a > 0$, $b > 0$).

561. а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$

562. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right).$ 563. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2.$

593. а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$.

Построить график функции:

617. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ ($x \geq 0$).

621. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ ($x \geq 0$).

699. Определить точки разрыва функции $y = \frac{1}{\ln x}$ и исследовать характер этих точек.

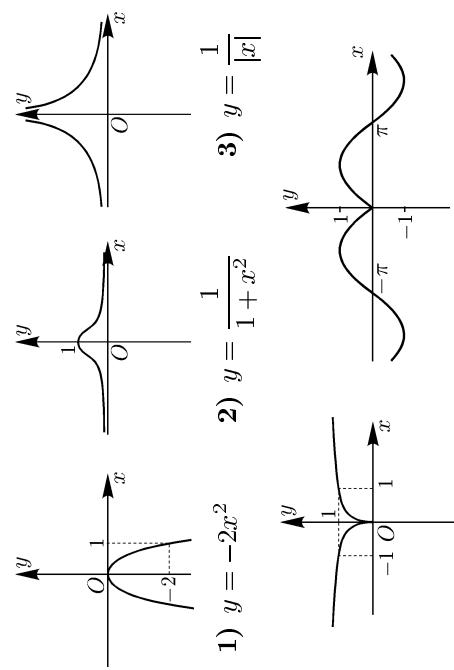
718. Исследовать на непрерывность и нарисовать эскиз графика функции $y = 1 - e^{-1/x^2}.$

731. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва:

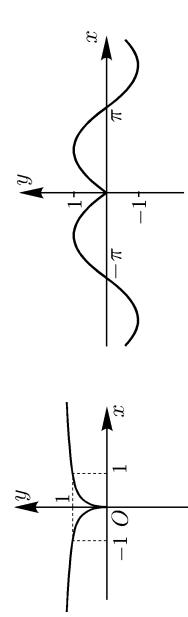
а) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

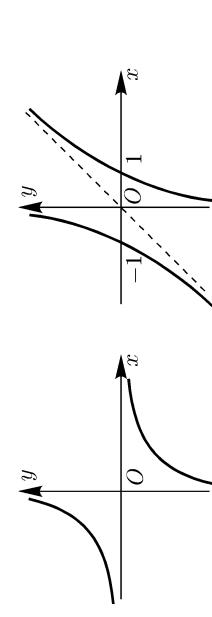
Занятие 1



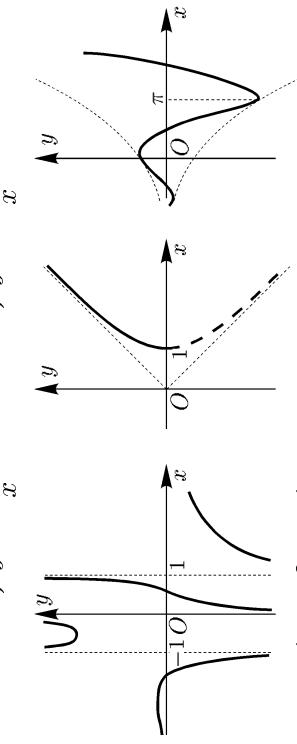
1) $y = \frac{1}{1+x^2}$



4) $y = \sqrt[3]{|x|}$

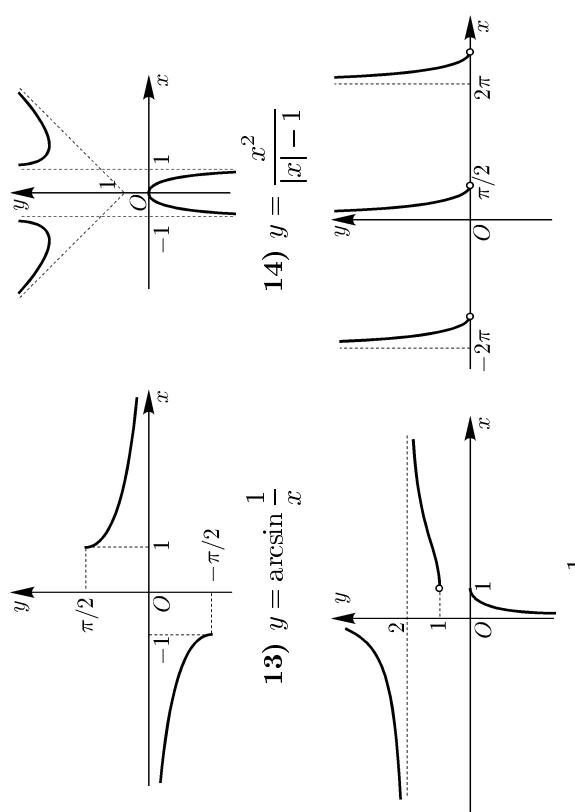


6) $y = -\frac{1}{x}$



12) $y = e^x \cos x$

Занятие 2



15) $y = \frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$

Занятие 2

1), 7) последовательность $\{(n-2)/n\}$ — возрастающая и ограниченная;

2), 8) последовательность $\{\lg n\}$ — возрастающая, она ограничена сверху, но не ограничена снизу;

3), 9) последовательность $\{n - n^2\}$ невозрастающая (убывает, начиная с $n_0 = 2$), ограниченная сверху, но не ограничена снизу;

4), 10) последовательность $\{n^3/2^n\}$ не монотонна, но убывает, начиная с $n_0 = 4$, и ограничена;

5), 11) последовательность $\{(1 + (-1)^n)/n\}$ не монотонна и ограничена;

6), 12) последовательность $\{1 + (-1)^n/n\}$ не монотонна и ограничена.

Занятие 3

4) 1;
5) 0 (воспользуйтесь результатом примера 5);

- 6) 0 (вспользуйтесь тем, что произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую — бесконечно малая);
 7) 1;
 8) 0 (рассмотрите последовательность $|nq^n|$ и воспользуйтесь результатом примера 5);
 9) 1 (см. доказательство леммы в п. 4.6).

Занятие 4

- 1), 2) задачи 1, 2 решаются по образцу примера 4;
 3), 4) 0 (выражения под знаком предела можно представить как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную);
 5) 1/2 (переведите иррациональность в знаменатель и сократите дробь на \sqrt{n});

6) 0 $\left(\frac{(n+1)^3}{n!} = \frac{2^n n^3}{n!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \right)$;

7) 0 $\left(\frac{(n+1)^3}{n!} = \frac{2^n}{n!} \frac{n^3}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \right)$.

Занятие 5

- 1) последовательность $\{n(2 + (-1)^n)\}$ не монотонна; она ограничена сверху, но не ограничена снизу; последовательность расходится к $+\infty$;
 2) последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ не монотонна; ограничена сверху, но не ограничена снизу; предела (ни конечного, ни бесконечного) нет;

- 3) последовательность $a_n = \begin{cases} k & \text{при } n = 2k, \\ \frac{k}{k+1} & \text{при } n = 2k+1, \end{cases}$ не монотонна; ограничена сверху, но не ограничена снизу; предела (ни конечного, ни бесконечного) нет;
 7) утверждение ж) доказывается аналогично е);
 8) утверждение з) является частным случаем е);
 9) воспользуйтесь ограниченностью бесконечно малой последовательности.

Занятие 6

- 1) 0; 2) 0; 3) e ; 4) 1; 5) $e^{-x^2/2}$; 6) $3/2$; 7) $a^a \ln(a/e)$; 8) 0;

- 9) $\ln 3 / \ln 2$; 10) $-\ln 2$.

Занятие 7

- 1) 1; 2) $2/3$; 3) 6; 4) 10; 5) $-1/2$; 6) $1/2$; 7) 1; 8) $1/4$; 9) $1/3$;
 10) $(3/2)^{10}$.

Указания: в задаче 4) раскройте скобки, пользуясь binномом Ньютона; в задачах 5)–10) разложите на множители многочлены, стоящие в числителе и знаменателе.

Занятие 8

- 1) $4/3$; 2) -2 ; 3) $1/\sqrt{2a}$; 4) $-1/16$; 5) $1/144$; 6) $1/4$; 7) m/n ;
 8) $\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}$; 9) $n(n+1)/2$; 10) $1/2; 11) 2; 12) 1/2; 13) 2/\pi$;
 14) $-\sin a$; 15) $1/\sqrt{3}$.

Указания: в задачах 1)–6) следует воспользоваться примерами 1 и 2; в задачах 7), 8) воспользуйтесь формулой (1); в задаче 9) воспользуйтесь тем, что $x^{n+1} - (n+1)x + n = (x^{n+1} - x) - n(x-1)$.

Занятие 9

- 1) $-1/2$; 2) $\frac{1}{2}(n-k)$.

Указание: в этих задачах следует действовать как в примере 3 после перехода к t .

Занятие 10

- 3) $1/2$; 4) $(3/2)^{30}$; 5) $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$; 6) 2^n ; 7) $\frac{1}{2}(a+b)$.

Занятие 11

- 1) функция непрерывна;
 2), 3) функция непрерывна во всех точках $x \neq -1$; в точке $x = -1$ она испытывает скачок;
 4) функция непрерывна при всех $x > 0$, кроме точки $x = 1$, которая является точкой бесконечного разрыва;
 5) функция непрерывна во всех точках $x \neq 0$; $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

Занятие 12

- 1) 0; 2) 0; 3) e ; 4) 1; 5) $e^{-x^2/2}$; 6) $3/2$; 7) $a^a \ln(a/e)$; 8) 0;

Занятие 15

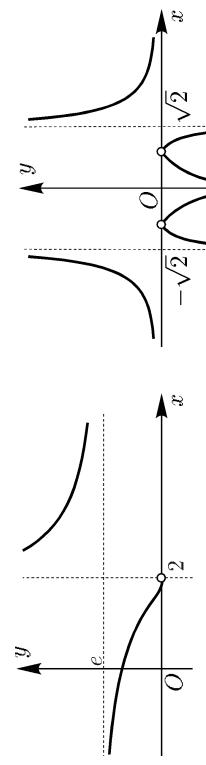
1) $3/2$; 2) $112/27$; 3) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$; 4) $1/4$; 5) $\sqrt{2}$; 6) $(a/b)^2$; 7) $a^b \ln a$; 8) $\sqrt[b]{b}$; 9) \sqrt{ab} ; 10) $1/\sqrt{ab}$.

Занятие 16

1) 5^{-5} ; 2) $\ln 8$; 3) $+\infty$; 4) $1/2$; 5) $y = 1$, если $x \in [0, 1]$; $y = x$, если $x > 1$; 6) $y = \ln 2$, если $x \in [0, 2]$; $y = \ln x$, если $x > 2$.

Занятие 17

1) $1/4$; 2) $-1/3$; 3) $2/\pi$; 4) $1/e$; 5) $1/(4 + \ln 4)$;



7) $y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1|}$

6) $y = e^{\frac{x-1}{x-2}}$

Вопросник

1. Дать определение действительного числа. Дать определение рационального и иррационального числа. Дать определение соотношения $a < b$ для действительных чисел.

2. Дать определение промежутков на оси различных видов (отрезок, интервал, полунитрал и т.п.). Дать определение окрестности точки на оси.

3. Дать определения функции и числовой последовательности.

Привести примеры.

4. Дать определения ограниченного (сверху, снизу) и не ограниченного множества, функции, последовательности.

5. Дать определение (без использования арифметических операций) предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. Найти по определению предел последовательности $\{1/n\}$. Доказать, что одна и та же последовательность не может иметь два разных предела.

6. Доказать ограниченность последовательности, имеющей конечный предел. Показать на примерах, что обратное утверждение неверно.

7. Сформулировать теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Объяснить, как строится этот предел в случае, когда последовательность не убывает и состоит из положительных чисел.

8. Объяснить, как определяются арифметические операции над действительными числами. Определить модуль действительного числа. Вывести неравенство треугольника $|a + b| \leq |a| + |b|$ и его следствие $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

9. Дать определение предела последовательности (при помощи неравенств). Определить ε -окрестность точки и сформулировать определение предела, используя это понятие. Доказать, что новое определение предела эквивалентно введенному ранее (см. вопрос 5).

10. Дать определение бесконечно малой последовательности. Доказать теоремы о сумме бесконечно малых последовательностей и произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную.

11. Доказать теоремы о пределах суммы, произведения и частного двух последовательностей.

12. Доказать теоремы о предельном переходе в неравенствах для числовых последовательностей.

13. Вывести формулу для бинома Ньютона $(1+x)^n$. Объяснить, как строится треугольник Паскаля.

14. Доказать теорему: существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Дать определение числа e , указать его приближенное значение.

15. Дать определение подпоследовательности. Доказать, что если последовательность имеет предел, то тот же предел имеет любая ее подпоследовательность. Доказать, что последовательность $\{(-1)^n\}$ не имеет предела.

16. Дать определения последовательности, имеющей предел $+\infty, -\infty$. Проверить, что $an+b \rightarrow +\infty$ при $a > 0$ и $an+b \rightarrow -\infty$ при $a < 0$. Сформулировать основные свойства последовательностей, имеющих бесконечный предел.

17. Дать определение бесконечно большой последовательности. Привести пример бесконечно большей последовательности, не имеющей бесконечного предела. Доказать теорему о связи бесконечно больших последовательностей с бесконечно малыми.

18. Дать определение символов o , O и \sim для числовых последовательностей. Привести примеры.

19. Дать определение проколотой окрестности точки. Сформулировать определение предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ при помощи неравенств и при помощи окрестностей. Дать определение бесконечно малой при $x \rightarrow a$ функции. Доказать теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

20. Дать определение функции, непрерывной в точке. Проверить, что функции $y \equiv b$, $y = ax + b$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны в любой точке.

21. Доказать теоремы о пределе суммы и пределе произведения двух функций. Проверить линейность операции перехода к пределу.

22. Доказать теорему о пределе частного двух функций. Сформулировать следствия из теорем об арифметических действиях с пределами для непрерывных функций.

23. Доказать лемму о сохранении знака. Вывести из нее теорему о предельном переходе в неравенстве.

24. Доказать теорему о предельном переходе в двух неравенствах. Доказать теорему о первом замечательном пределе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

25. Дать определение предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, бесконечно большой функции при $x \rightarrow a$. Доказать теоремы о связи бесконечно большой и бесконечно малой функции.

26. Дать определение односторонних пределов функции. Показать, что функция имеет предел в точке тогда и только тогда, когда она имеет односторонние пределы в этой точке и эти пределы совпадают.

27. Дать определение односторонней непрерывности. Изложить классификацию точек разрыва. Привести примеры.

28. Дать определение монотонной функции. Доказать, что если функция монотонна на промежутке, то в каждой точке этого промежутка она либо непрерывна, либо испытывает скачок.

29. Сформулировать и доказать теорему о точках разрыва равнодействующей функции.

30. Определить пределы функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$. Привести примеры. Сделать чертежи.

31. Дать определение сложной функции. Доказать теорему о непрерывности сложной функции. Привести примеры.

32. Доказать следующую теорему о пределе сложной функции: если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = f(b)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$. Показать на примере, что теорема теряет силу, если $f(b)$ заменить на произвольное число c .

33. Доказать, что если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow b} f(y) = c$ и $g(x) \neq b$ в $\dot{O}(a)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$. Сформулировать и доказать вариант этой теоремы с $b = +\infty$. Привести примеры.

34. Дать определение предела функции по Гейне. Проверить эквивалентность этого определения исходному. Показать, что функция Дирихле не имеет односторонних пределов ни в одной точке.

35. Доказать лемму о вложенных отрезках. Как изменится утверждение леммы, если длины отрезков не стремятся к 0? Показать на примере, что отрезки нельзя заменить интервалами.

36. Доказать лемму Больцано–Вейерштрасса.

37. Доказать лемму Бореля о покрытиях. Проверить, что в формуловке леммы Бореля интервалы нельзя заменить отрезками.

38. Дать определение фундаментальной последовательности. Доказать, что последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она имеет конечный предел.

39. Дать определение верхней и нижней грани множества. Доказать теорему о существовании верхней грани.

40. Доказать теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Показать на примерах, что все условия в этой теореме существенны.

41. Дать определение обратной функции. Привести примеры. Доказать теорему о непрерывной обратной функции.

42. Сформулировать следствия из теоремы об обратной функции для интервалов и полуинтервалов. Доказать одно из них. Привести примеры.

43. Дать определение, изобразить графики, проверить монотонность и непрерывность функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

44. Дать определение, проверить монотонность и непрерывность степенной функции $y = x^r$ с рациональным r . Нарисовать график.

45. Дать определение показательной функции $y = a^x$. Выписать ее основные свойства. Считая известным, что a^x — монотонная функция, доказать ее непрерывность. Нарисовать графики.

46. Дать определение логарифмической функции $y = \log_a x$, проверить ее непрерывность и монотонность. Нарисовать графики.

47. Дать определение общей степенной функции $y = x^\alpha$. Доказать ее непрерывность и монотонность. Нарисовать графики.

48. Дать определение гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{ctgh} x$. Нарисовать графики.

49. Дать определение основных элементарных функций и экспонентарных функций. Доказать теорему об их непрерывности.

50. Доказать теорему о втором замечательном пределе:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

51. Привести следствия из теоремы о втором замечательном пределе:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

52. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

53. Объяснить смысл записей $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow a$). Выписать основные асимптотические соотношения для функций $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, e^x , используя символы o , O и \sim .

54. Доказать первую теорему Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке.

55. Доказать вторую теорему Вейерштрасса о верхней и нижней гранях функции, непрерывной на отрезке.

56. Доказать, что множество значений функции, непрерывной на отрезке, есть отрезок. Показать на примерах, что множество значений функции, заданной и непрерывной на интервале, может быть промежутоком любого вида.

57. Дать определение равномерно непрерывной функции. Приверить, что функции $ax + b$, $\sin x$, $\cos x$ равномерно непрерывны на оси.

58. Доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

59. Показать на примерах, что утверждения теорем Вейерштрасса и Кантора неверны для интервала.

60. Дать определение параметрически заданных кривых на плоскости и функции. Привести примеры.

61. Дать определение комплекснозначной функции, предела и непрерывности комплекснозначной функции в точке. Дать определение функции e^{zx} и показать, что она непрерывна при любом $z \in \mathbb{R}$.

Греческий алфавит

Указатель основных обозначений

прописная	строчная	название
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ	тэта
Ι	ι	иота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	нио
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тайду
Υ	υ	иппсилон
Φ	φ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

Предметный указатель

Предметный указатель

Предметный указатель

Оглавление

Предисловие	5
§1. Действительные числа. Последовательности и их пределы	9
1.1. Действительные числа	9
1.2. Определение функции. Определение и запись последовательности	11
1.3. Ограниченные и неограниченные множества, функции, последовательности	12
1.4. Предел последовательности	13
1.5. Предел монотонной последовательности	14
1.6. Арифметические действия над действительными числами	16
1.7. Модуль действительного числа и его свойства	17
1.8. Свойства действия действительных чисел	18
1.9. Новое определение предела	19
1.10. Бесконечно малые последовательности	20
1.11. Арифметические действия над сходящимся последовательностями	21
1.12. Переход к пределу в неравенствах	24
1.13. Метод математической индукции. Бином Ньютона	25
1.14. Число e	27
1.15. Подпоследовательности	29
1.16. Пределы $+\infty$ и $-\infty$	29
1.17. Бесконечно большие последовательности; их связь с бесконечно малыми	31
1.18. Символы o и O	32
1.19. Кванторы \exists и \forall	33
1.20. Необходимые, достаточные и равносильные условия	34
§2. Пределы и непрерывность функций	34
2.1. Конечный предел в конечной точке	36
2.2. Непрерывность в точке	38
2.3. Арифметические действия с пределами	42
2.4. Пределочный переход в неравенствах	45
2.5. Первый замечательный предел	46
2.6. Бесконечные предельы в конечной точке	47
2.7. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми	49

Просьба к читателям все замечания и опечатки, если они обнаружатся, сообщать по адресу:
109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3/12,
кафедра математического анализа,
электронный адрес: ma_miem@orgc.ru

2.8. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность	49
2.9. Классификация точек разрыва	51
2.10. Точки разрыва монотонной функции	54
2.11. Точки разрыва рациональной функции	55
2.12. Пределы на бесконечности	57
2.13. Предел сложной функции	58
2.14. Определение предела функции по Гейне	62
§3. Некоторые свойства числовой прямой	
3.1. Лемма о вложенных отрезках	63
3.2. Лемма Больцано–Вейерштрасса	65
3.3. Лемма Бореля	66
3.4. Фундаментальные последовательности. Плотнота числовой прямой	68
3.5. Верхняя и нижняя грани числового множества	69
§4. Функции, непрерывные на промежутках. Непрерывность элементарных функций	
4.1. Определения	72
4.2. Теорема Коши о промежуточном значении	72
4.3. Теорема о непрерывной обратной функции	75
4.4. Обратные тригонометрические функции	80
4.5. Степенная функция с рациональным показателем	81
4.6. Показательная функция $y = a^x$	83
4.7. Логарифмическая функция $y = \log_a x$	86
4.8. Общая степенная функция $y = x^\alpha$	87
4.9. Гиперболические функции	88
4.10. Элементарные функции. Их непрерывность	89
4.11. Второй замечательный предел	90
4.12. Типы неопределенностей	92
4.13. Еще раз о символах o и O . Эквивалентные функции	96
4.14. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке	100
4.15. Равномерная непрерывность	103
4.16. Параметрическое задание кривых на плоскости и функций	106
4.17. Комплекснозначные функции	108
Литература	110
Предисловие к упражнениям	111

Занятие 1. Элементарные методы построения графиков функций. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Простейшие приемы построения графиков	49
Занятие 2. Действительные числа. Числовые последовательности. Метод математической индукции. Бином Ньютона	57
Занятие 3. Пределы последовательностей	58
Занятие 4. Пределы последовательностей	62
Занятие 5. Подпоследовательности. Символы O и o . Кванторы	63
Занятие 6. Контрольная работа №1	65
Занятие 7. Предел функции. Непрерывность. Раскрытие простоящих неопределенностей	66
Занятие 8. Раскрытие неопределенности (продолжение)	68
Занятие 9. Бесконечные пределы в конечной точке. Неопределенности типа $\infty - \infty$	69
Занятие 10. Пределы на бесконечности. Раскрытие неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$	72
Занятие 11. Исследование функций на непрерывность и определение точек разрыва	75
Занятие 12. Пределы, связанные со степенными, показательными и логарифмическими функциями. Второй замечательный предел и его следствия. Неопределенности типа 1^∞	77
Занятия 13–14. Упражнения из лекций 9–16	80
Занятие 15. Использование эквивалентности функций при вычислении пределов	83
Занятие 16. Использование эквивалентности функций при вычислении пределов (продолжение). Сравнение поведения функций в нуле и на бесконечности	87
Занятие 17. Контрольная работа №2	92
Приложение (избранные задачи)	96
Ответы и указания	103
Вопросник	106
Греческий алфавит	108
Указатель основных обозначений	110
Предметный указатель	111