

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ  
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

**Д. А. Паршин, Г. Г. Зегря**

## **КОЛЕБАНИЯ**

**(конспект лекций по общему курсу физики)**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

## Гармонические колебания. Колебания математического маятника. Колебания физического маятника. Фазовый портрет маятника. Адиабатические инварианты

Довольно распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые **малые колебания**, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. Мы рассмотрим эти движения в наиболее простом случае, когда система имеет всего лишь одну степень свободы. Это значит, что для однозначного определения положения системы в пространстве достаточно задать всего одно число. Это не обязательно должна быть декартова координата, а в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор какой-то другой величины. Такая величина, однозначно характеризующая положение системы, называется ее **обобщенной координатой**.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия  $U(q)$  как функция некоторой обобщенной координаты  $q$  имеет минимум. Отклонения от этого минимума приводят к возникновению силы  $-dU/dq$ , стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее минимуму значение координаты  $q$  через  $q_0$ . Поскольку при малых колебаниях разность  $q - q_0$  предполагается малой, то потенциальную энергию можно разложить в ряд по степеням  $q - q_0$ , оставив в ней только первый не исчезающий член.

В общем случае справедливо следующее разложение функции  $U(q)$  в так называемый **ряд Тейлора** вблизи значения  $q = q_0$ :

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{1!}U'(q_0)(q - q_0) + \frac{1}{2!}U''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}U^{[n]}(q_0)(q - q_0)^n + \dots \quad (13.1)$$

В математике доказывается теорема, согласно которой, если точка  $q_0$  не является особой точкой функции  $U(q)$  и функция бесконечно кратно дифференцируема в этой точке, так что ни одна из производных не обращается в бесконечность ( $U^{[k]}(q_0) \neq \infty$ ), то формула, записанная выше, является точной. В это нетрудно поверить, потому что фактически справа записана функция, которая при  $q = q_0$  принимает то же значение, что и функция  $U(q)$ , и **все** производные от этой функции совпадают с соответствующими производными от  $U(q)$  при  $q = q_0$ .

В нашем случае первое слагаемое есть просто константа  $U(q_0)$ , которую можно без ограничения общности считать равной нулю (это есть начало отсчета потенциальной энергии). Второе слагаемое равно нулю в силу того, что в положении минимума равна нулю производная, определяющая силу,

$$U'(q_0) = \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} = 0. \quad (13.2)$$

Поэтому первый не исчезающий член в разложении — это квадратичный:

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{k}{2}(q - q_0)^2, \quad (13.3)$$

где

$$k = U''(q_0) > 0 \quad (13.4)$$

положительная величина. Считая, что  $U(q_0) = 0$ , и вводя обозначение

$$x = q - q_0, \quad (13.5)$$

получим

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2. \quad (13.6)$$

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы есть квадратичная функция **обобщенной скорости**  $\dot{q}$  и в общем случае имеет вид

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2. \quad (13.7)$$

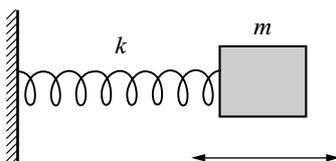
В том же приближении малых колебаний, которое мы использовали ранее, достаточно заменить функцию  $a(q)$  на ее значение при  $q = q_0$ . Вводя для краткости обозначение<sup>1</sup>

$$a(q_0) = m, \quad (13.8)$$

получим окончательно для полной энергии системы выражение

$$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (13.9)$$

то есть выражение, формально совпадающее с энергией механической системы “грузик+пружинка”, (рис. 13.1). В механике доказывается теорема, что если выражение для полной энергии двух систем как функция их обобщенных координаты и скорости совпадают, то совпадают и уравнения их движения.



**Рис. 13.1.** Простейшая модель гармонического осциллятора — грузик на пружинке.

Уравнение движения грузика, как известно, имеет вид  $ma = F$ , где возвращающая сила  $F = -kx$ , или

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (ma = -kx). \quad (13.10)$$

Сокращая на  $m$ , его можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (13.11)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (13.12)$$

Дифференциальное уравнение  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  является **линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка**. Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, оно имеет **два** линейно независимых решения. В данном конкретном случае легко проверить, что это функции

$$\sin \omega t \text{ и } \cos \omega t. \quad (13.13)$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию этих двух решений:<sup>2</sup>

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (13.14)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные. Это выражение можно переписать в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (13.15)$$

Поскольку  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , то, сравнивая с (13.14), получаем

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{tg } \alpha = -\frac{c_2}{c_1}, \quad (13.16)$$

где  $c_1 = a \cos \alpha$ , а  $c_2 = -a \sin \alpha$ .

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает **гармоническое колебательное движение**. Коэффициент  $a$  называется **амплитудой** колебаний, а аргумент косинуса — их **фазой**,  $\alpha$  есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени. Величина  $\omega$  называется **циклической частотой** колебаний, или просто **частотой**.

Частота  $\omega$  является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения, и в частности от энергии. Согласно формуле (13.12),  $\omega = \sqrt{k/m}$ , то есть она полностью

<sup>1</sup>Величина  $m$  совпадает с массой, только если  $x$  есть декартова координата частицы!

<sup>2</sup>Линейное однородное уравнение обладает таким свойством, что если  $x(t)$  — решение, то  $C \cdot x(t)$  — тоже решение. Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения, то их сумма  $x_1(t) + x_2(t)$  — тоже решение.

определяется свойствами механической системы как таковой. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний. Оно исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения независимость частоты от энергии системы связана с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты. Оно не имеет места, если, например, функция  $U(x)$  имеет при  $x = 0$  минимум более высокого порядка:  $U(x) \propto x^n$ ,  $n > 2$ .

Энергия системы, совершающей малые колебания, есть

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}\omega^2 a^2. \quad (13.17)$$

Она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

В случае гармонических колебаний зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re} \{Ae^{i\omega t}\}, \quad (13.18)$$

где  $A$  — комплексная постоянная. Записав ее в виде

$$A = ae^{i\alpha}, \quad (13.19)$$

мы вернемся к старому выражению

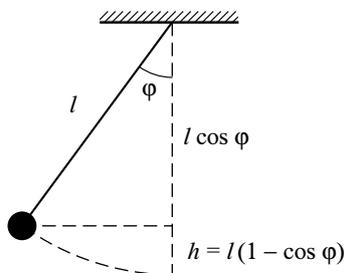
$$x = \operatorname{Re} ae^{i\omega t + i\alpha} = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (13.20)$$

Постоянную  $A$  называют **комплексной амплитудой**. Ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент — с начальной фазой колебаний.

Оперирование с экспоненциальными множителями в математическом отношении проще, чем с тригонометрическими, так как дифференцирование не изменяет их вида. При этом пока мы производим лишь **линейные операции** (сложение, умножение на постоянные множители, дифференцирование, интегрирование), можно вообще опускать знак вещественной части, переходя к последней лишь в окончательном результате вычислений.

## Колебания математического маятника

Рассмотрим в качестве примера колебания **математического маятника** — материальной точки или грузика, размерами которого можно пренебречь и который подвешен на нерастяжимой невесомой нити. Положение нити вертикально вниз является положением устойчивого равновесия. Если откло-



**Рис. 13.2.** Математический маятник.

нить направление нити от вертикали, то возникнет сила, возвращающая ее в прежнее положение. Попробуем описать движение такого маятника математически.

В качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол  $\varphi$  отклонения нити от вертикали. Потенциальная энергия тогда определяется выражением

$$U = mgh = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (13.21)$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2. \quad (13.22)$$

В результате полная энергия равна

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (13.23)$$

Она остается постоянной в процессе движения. Если мы интересуемся малыми колебаниями  $\varphi \ll 1$ , то  $\cos \varphi$  можно разложить в ряд Тейлора:

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2!}. \quad (13.24)$$

Тогда

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\varphi^2\right). \quad (13.25)$$

Сравнивая это с выражением (13.9),

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2), \quad (13.26)$$

мы приходим к выводу, что математический маятник колеблется с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (13.27)$$

хорошо известной из начального курса физики. Уравнение колебаний имеет следующий вид, аналогичный (13.11):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (13.28)$$

Его можно получить, воспользовавшись, например, законом сохранения энергии. Дифференцируя (13.25) по времени и приравнивая производную нулю, мы приходим к нужному результату

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}ml^2\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\varphi^2\right) = ml^2\dot{\varphi}(\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi) = 0. \quad (13.29)$$

Поскольку в общем случае  $ml^2\dot{\varphi} \neq 0$ , то должно обращаться в нуль выражение в круглых скобках.

## Колебания физического маятника

Рассмотрим теперь малые колебания **физического маятника**. Так в общем случае называется твердое тело произвольной формы, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $C$  (рис. 13.3). Положение тела в каждый момент времени характеризуется, как и в случае математического маятника, его углом отклонения из положения равновесия  $\varphi$ . Кинетическая энергия физического маятника определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \quad (13.30)$$

где  $I$  — момент инерции маятника относительно оси вращения  $C$ . Обозначим расстояние от оси вращения до центра инерции тела через  $a$ . Тогда потенциальная энергия при малых  $\varphi$  определится выражением:

$$U = mga(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}mga\varphi^2. \quad (13.31)$$

В результате полная энергия маятника равна

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mga\varphi^2 = \frac{1}{2}I\left(\dot{\varphi}^2 + \underbrace{\frac{mga}{I}}_{\omega^2}\varphi^2\right), \quad (13.32)$$

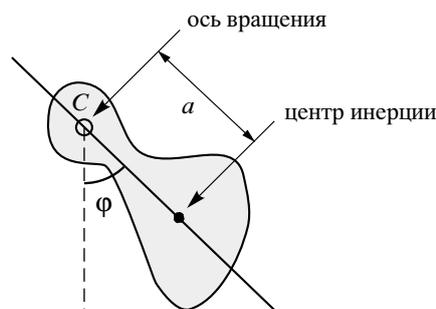


Рис. 13.3. Физический маятник.

а частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (13.33)$$

где  $l = I/ma$  — **приведенная длина** физического маятника.

## Фазовый портрет маятника

Вернемся опять к колебаниям груза на пружине. Как мы видели, энергия системы определяется выражением

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \quad (13.34)$$

Введем вместо скорости импульс  $p = m\dot{x}$ . Тогда

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E. \quad (13.35)$$

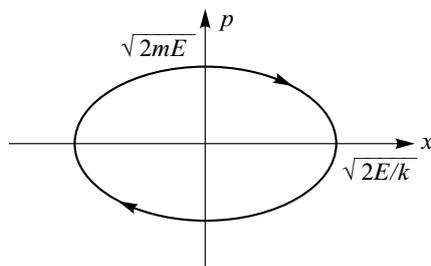
Разделив это равенство на  $E$ , его можно переписать в виде

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1, \quad (13.36)$$

или

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 = 1. \quad (13.37)$$

В “пространстве” с координатными осями  $x$  и  $p$  это уравнение эллипса с полуосями  $\sqrt{2mE}$  и  $\sqrt{2E/k}$ . Пространство с осями “координата–импульс” называется **фазовым пространством** системы.



**Рис. 13.4.** Траектория гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

Таким образом, траектория гармонического осциллятора в фазовом пространстве представляет собой эллипс. Поскольку площадь эллипса, задаваемого уравнением  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , как известно, равна  $\pi ab$ , то в нашем случае площадь под фазовой траекторией определяется выражением

$$S = \pi\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \frac{E}{\omega}, \quad (13.38)$$

или

$$\frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}. \quad (13.39)$$

Величина площади  $S$ , заключенной внутри фазовой траектории частицы, деленная на  $2\pi$ , имеет в физике специальное название **адиабатического инварианта**. Для гармонического осциллятора адиабатический инвариант определяется выражением

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}. \quad (13.40)$$

Возникает вопрос, почему величина  $I$  была удостоена такого названия.

Здесь все дело в том, что до сих пор мы рассматривали движение при **неизменных параметрах системы**, то есть в нашем случае колебаний груза на пружинке неизменными параметрами движения были масса груза  $m$  и упругая постоянная  $k$  (а значит и частота  $\omega$ ).

Вообразим теперь ситуацию, когда параметры системы медленно (как говорят, **адиабатически**) меняются со временем. Медленность изменения означает, что за время, равное периоду движения, эти параметры мало изменяются по сравнению со своей первоначальной величиной. Например, если меняется упругая постоянная  $k$ , то за время  $\Delta t = T$  ( $T$  — период движения) она изменяется на величину

$$\Delta k = \frac{dk}{dt} \Delta t = \dot{k}T. \quad (13.41)$$

Это изменение должно быть много меньше самой величины  $k$ :

$$\dot{k}T \ll k. \quad (13.42)$$

В этом случае оказывается, что величина адиабатического инварианта  $I$  остается в процессе движения **постоянной**. Например, если меняется  $k$ , то

$$I = \frac{E}{\omega} = \frac{E}{\sqrt{k/m}} = \text{const}, \text{ или } \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const}. \quad (13.43)$$

В том случае, когда, например, упругая константа  $k$  медленно увеличивается, увеличивается и энергия системы  $E \propto \sqrt{k}$ , или так как

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 = \frac{1}{2}ka^2, \quad (13.44)$$

то  $E/\sqrt{k} = \sqrt{k}a^2/2 = \text{const}$ . Таким образом, при увеличении  $k$  амплитуда колебаний падает по закону

$$a \sim \frac{1}{k^{1/4}}. \quad (13.45)$$

Мы не будем доказывать в общем виде утверждение о сохранении адиабатического инварианта при медленном изменении параметров системы. Однако для частного случая гармонического осциллятора (грузика на пружине) такое доказательство будет представлено. Оно показывает способ, которым это утверждение может быть доказано в других ситуациях.

Запишем выражение для полной энергии системы

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2}. \quad (13.46)$$

Пусть  $k$  меняется медленно. Продифференцируем это равенство по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{k}x^2 = \\ &= \dot{x}(m\ddot{x} + kx) + \frac{1}{2}\dot{k}x^2. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Величина, стоящая в круглых скобках, в силу второго закона Ньютона, равна нулю, так что

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{k}x^2, \quad (13.48)$$

то есть скорость изменения энергии системы оказывается пропорциональной малому параметру  $\dot{k}$ .

В первом приближении по  $\dot{k}$  сюда вместо  $x$  можно подставить решение уравнения

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (13.49)$$

где  $k$  считается постоянной, то есть  $x = a \cos(\omega t + \alpha)$ . В результате

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{k}a^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (13.50)$$

Усредним теперь это равенство по быстрым колебаниям грузика<sup>3</sup>. Учитывая, что  $\dot{k}$  — медленная функция времени, и считая ее константой, а среднее значение  $\overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = 1/2$ , получим

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{2}\dot{k}a^2 \frac{1}{2}. \quad (13.51)$$

<sup>3</sup>“Быстрым” в том смысле, что за период колебаний величина  $k$  практически не изменяется.

В случае гармонических колебаний  $E = m\omega^2 a^2/2$ . Выражая отсюда  $a^2$  и подставляя в выражение (13.51), получим

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{1}{2} \dot{k} \frac{E}{m\bar{m}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{k}E}{k}. \quad (13.52)$$

Здесь в том же приближении под  $E$  нужно понимать среднее по периоду значение энергии  $\bar{E}$ . В результате

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} \frac{\bar{E}}{k}. \quad (13.53)$$

Сокращая на  $dt$ , мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{E}}{\bar{E}} = \frac{1}{2} \frac{dk}{k}. \quad (13.54)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln \bar{E} = \frac{1}{2} \ln k + \text{const}, \quad (13.55)$$

или

$$\ln \bar{E} - \ln \sqrt{k} = \text{const}, \quad \implies \quad \ln \left( \frac{\bar{E}}{\sqrt{k}} \right) = \text{const}, \quad (13.56)$$

или

$$\frac{\bar{E}}{\sqrt{k}} = \text{const}. \quad (13.57)$$

Так как  $\omega = \sqrt{k/m}$ , а  $m$  — константа, то мы и приходим к утверждению, что в процессе движения

$$I = \frac{\bar{E}}{\omega} = \text{const}, \quad (13.58)$$

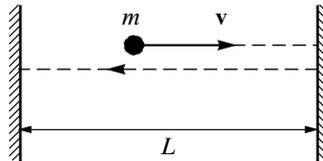
то есть при медленном изменении параметров осциллятора его энергия изменяется пропорционально частоте. Это утверждение остается в силе, если вместо  $k$  медленно меняется масса осциллятора  $m$ .

Замечательно то, что это равенство справедливо не только для колебаний грузика на пружине, но и для любой другой системы, совершающей гармонические колебания, параметры которой испытывают медленные вариации со временем. Например, это может быть математический маятник, изображенный на рис. 13.2, длина которого  $l$  медленно меняется со временем. Более того, сохранение адиабатического инварианта имеет место для **любой** системы, совершающей финитное движение, при медленном изменении параметров последней. Конкретная его форма, однако, зависит от типа движения. По определению, адиабатический инвариант определяется выражением

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq, \quad (13.59)$$

где  $p$  — обобщенный импульс, а  $q$  — обобщенная координата и интеграл берется по области изменения этой координаты **туда и обратно** (на что указывает кружок  $\circ$  на значке интеграла).

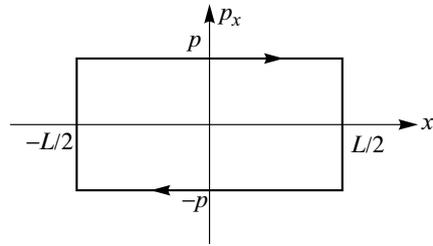
Для примера рассмотрим систему, представляющую собой шарик, который помещен в коробку, где он движется от стенки к стенке, упруго отражаясь от них, совершая тем самым колебательное движение (но колебания эти не гармонические) (рис. 13.5). Траектория этой системы в фазовом



**Рис. 13.5.** Частица движущаяся между двумя стенками.

пространстве имеет вид прямоугольника, изображенного на рис. 13.6. Площадь под ней равна  $2pL$ , где  $p = mv$  — импульс. В итоге адиабатический инвариант имеет следующий вид:

$$I = \frac{1}{2\pi} \cdot 2pL = \frac{1}{\pi} pL \quad (13.60)$$



**Рис. 13.6.** Траектория в фазовом пространстве для частицы, движущейся между двумя стенками.

и его сохранение означает, что

$$pL = \text{const.} \quad (13.61)$$

В данном случае единственным параметром колебательной системы является длина коробки  $L$ . Это значит, что если  $L$  медленно меняется со временем, то импульс частицы изменяется по закону

$$p \sim \frac{1}{L}. \quad (13.62)$$

Другое доказательство этого факта, исходя из известных законов упругого отражения шарика от медленно движущейся стенки, предоставляется вам самим.

## Вынужденные колебания. Биения. Затухающие колебания. Добротность. Вынужденные колебания при наличии трения. Принцип суперпозиции колебаний

Перейдем теперь к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует переменная во времени внешняя сила  $F(t)$ . Такие колебания называют **вынужденными**, в отличие от **свободных** колебаний, рассмотренных ранее.

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = F(t), \quad (14.1)$$

где  $F(t)$  есть внешняя сила. Уравнение движения можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad (14.2)$$

где мы снова ввели частоту свободных колебаний  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

По математической терминологии, уравнение (14.2) представляет собой **неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами**. Слово “неоднородное” означает, что правая часть этого уравнения отлична от нуля. В математике доказывается теорема, согласно которой общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является суммой двух выражений,

$$x = x_0 + x_1, \quad (14.3)$$

где  $x_0$  — общее решение однородного уравнения (то есть с правой частью равной нулю), а  $x_1$  — любое частное решение неоднородного уравнения. В данном случае  $x_0$  представляет собой рассмотренные ранее свободные колебания.

Рассмотрим, далее, представляющий особый интерес частный случай, когда вынуждающая сила является простой периодической функцией времени с некоторой частотой  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (14.4)$$

Частный интеграл уравнения (14.2) ищем в виде

$$x_1 = b \cos(\gamma t + \beta) \quad (14.5)$$

с тем же периодическим множителем. Подставляя это решение в уравнение

$$-\gamma^2 b \cos(\gamma t + \beta) + \omega^2 b \cos(\gamma t + \beta) = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta), \quad (14.6)$$

мы находим амплитуду вынужденных колебаний

$$b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}. \quad (14.7)$$

Прибавляя решение однородного уравнения, получим общее решение в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (14.8)$$

Произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  определяются, как и раньше, из начальных условий.

Мы приходим к выводу, что движение под действием периодической вынуждающей силы представляет собой суперпозицию двух колебаний — с собственной частотой системы  $\omega$  и с частотой вынуждающей силы  $\gamma$ .

Полученное выше решение (14.8) не применимо в случае так называемого **резонанса**, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы, то есть при  $\omega = \gamma$ . Второе

слагаемое в формуле (14.8) в этом случае обращается в бесконечность. Между тем очевидно, что за конечное время  $t$  система не может приобрести бесконечную энергию под действием конечной силы. Поэтому формально компенсировать эту нефизическую расходимость можно за счет первого слагаемого. Поскольку амплитуда свободных колебаний никак нами не была фиксирована, выделим из первого слагаемого член, компенсирующий бесконечность во втором слагаемом при  $\omega = \gamma$ . Для этого произведем замену

$$a \cos(\omega t + \alpha) \implies a \cos(\omega t + \alpha) - \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\omega t + \beta). \quad (14.9)$$

Нетрудно убедиться, что при этом мы снова получаем общее решение однородного уравнения.

Теперь общее решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]. \quad (14.10)$$

Далее используем формулу

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y+x}{2}. \quad (14.11)$$

В результате при  $\omega \rightarrow \gamma$ , заменяя  $\sin(\omega - \gamma)t/2 \implies (\omega - \gamma)t/2$ , получаем

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (14.12)$$

Нетрудно проверить, что второе слагаемое в этой формуле действительно удовлетворяет уравнению движения (то есть является частным интегралом) при  $\omega = \gamma$ . Таким образом, мы видим, что в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний линейно растет со временем. В конце концов колебания перестают быть малыми и вся теория теряет свою применимость.

Выясним теперь, как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда  $\gamma = \omega + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина. Для этого представим общее решение в комплексном виде

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}, \quad (14.13)$$

где  $A$  и  $B$  — комплексные постоянные, из которых можно выделить модуль и фазу:

$$A = ae^{i\alpha}, \quad B = be^{i\beta}. \quad (14.14)$$

В силу условия  $\varepsilon \ll \omega$  мы можем рассматривать величину  $A + Be^{i\varepsilon t}$  в круглых скобках как медленно меняющуюся функцию времени по сравнению с множителем  $e^{i\omega t}$ . Поэтому движение вблизи резонанса выглядит как малые колебания, но с амплитудой и фазой, медленно меняющимися во времени. Обозначив амплитуду через  $C$ , имеем

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|, \quad (14.15)$$

или, учитывая выражения для  $A$  и  $B$ , получим

$$C = |ae^{i\alpha} + be^{i(\varepsilon t + \beta)}| = |a + be^{i(\varepsilon t + \beta - \alpha)}|. \quad (14.16)$$

Отсюда

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha), \quad (14.17)$$

и мы видим, что амплитуда  $C$  колеблется периодически с малой частотой  $\varepsilon$  между двумя пределами

$$|a - b| \leq C \leq a + b. \quad (14.18)$$

Это явление носит название **биений** (рис. 14.1).

## Затухающие колебания

До сих пор мы рассматривали идеализированную ситуацию — **модель**, в которой движение тела происходит в пустоте, или ситуацию, в которой влиянием среды на движение можно пренебречь. На самом деле понятно, что при движении тела в среде последняя всегда оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. При этом энергия движущегося тела в конце концов переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место **диссипация** энергии.

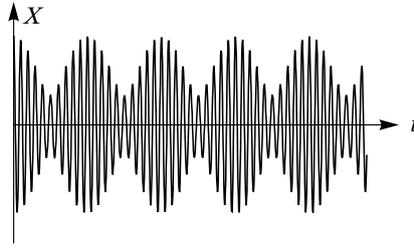


Рис. 14.1. Биения.

В этих условиях процесс движения уже не является чисто механическим процессом. Наряду с движением тела требуется учитывать движение и самой среды, а значит и изменение теплового состояния как среды, так и тела. В такой ситуации уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение тела является лишь функцией его координат и скорости в данный момент времени. Таким образом, в этой ситуации в общем случае не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике: произведение массы на ускорение равно действующей силе. Может, например, иметь место реакция запаздывания отклика среды на возмущение, вносимое телом. Таким образом, задача о движении тела в среде (или задача об упругих деформациях самого тела, например колебания грузика на пружине), вообще говоря, не является задачей чистой механики.

Однако если движение тела в среде достаточно медленное по сравнению со скоростью внутренних диссипативных процессов, то реакция среды на движение тела в некоторых случаях может быть приближенно описана введением так называемой **силы трения**, действующей на тело и зависящей лишь от скорости последнего. Такая ситуация возникает, например, при движении тела в вязкой среде, жидкости или газе. Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы. Поэтому первый исчезающий член пропорционален скорости тела<sup>1</sup>. В итоге в случае одной степени свободы обобщенную силу трения можно записать в виде

$$f_p = -\alpha_p \dot{x}. \quad (14.19)$$

Здесь  $\alpha_p$  — положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила направлена противоположно скорости тела.

Добавляя эту силу к упругой силе в уравнение движения, получим

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha_p \dot{x}. \quad (14.20)$$

Разделим это уравнение на  $m$  и введем обозначения

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \quad \text{и} \quad 2\lambda \equiv \frac{\alpha_p}{m} > 0. \quad (14.21)$$

Здесь  $\omega_0$  есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина  $\lambda$  называется **коэффициентом затухания**. В итоге мы приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (14.22)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будем искать в виде  $x = e^{rt}$ . Подставляя эту функцию в уравнение и сокращая на  $e^{rt}$ , находим для  $r$  характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0. \quad (14.23)$$

У этого квадратного уравнения имеется два корня:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (14.24)$$

С учетом этого общее решение уравнения (14.22) можно записать в виде

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad (14.25)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные.

<sup>1</sup>Эти рассуждения заведомо не применимы к движению одного твердого тела по поверхности другого, то есть при наличии так называемого **трения скольжения**.

Для дальнейшего анализа следует различать два случая.

Если  $\lambda < \omega_0$ , то корни  $r_{1,2}$  оказываются комплексными и сопряженными друг другу:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (14.26)$$

Общее решение в этом случае может быть представлено в виде

$$x = \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left( -\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \right) \right\}, \quad (14.27)$$

где  $A$  — произвольная комплексная постоянная. Выделяя из нее вещественные модуль  $a$  и фазу  $\alpha$ , можно записать

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (14.28)$$

Движение, описываемое этой формулой, представляет собой так называемые **затухающие колебания**. Его можно представить себе как гармонические колебания с экспоненциально затухающей амплитудой (рис. 14.2). Скорость убывания амплитуды определяется коэффициентом затухания  $\lambda$ .

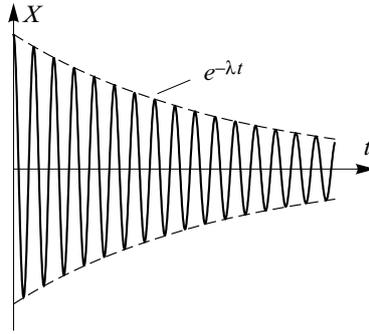


Рис. 14.2. Затухающие колебания,  $\lambda < \omega_0$ .

Что касается частоты колебаний  $\omega$ , то она меньше частоты свободных колебаний  $\omega_0$  в отсутствие трения. Причина проста — трение обычно задерживает движение.

Если трение достаточно мало, то  $\lambda \ll \omega_0$  и за время одного периода  $2\pi/\omega$  амплитуда затухающего колебания почти не изменяется. В этом случае для энергии системы существует достаточно простое выражение. В общем случае энергия колеблющейся системы есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2). \quad (14.29)$$

Величина  $x$  определяется выражением (14.28). Дифференцируя по времени, получим скорость

$$\dot{x} = -a\omega e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha) - \lambda a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (14.30)$$

В силу неравенства  $\lambda \ll \omega$  второе слагаемое в этом выражении много меньше первого, и им можно пренебречь. Тогда получаем для энергии

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 e^{-2\lambda t}. \quad (14.31)$$

Отсюда следует, что энергия системы в этом приближении убывает по закону

$$E = E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (14.32)$$

где  $E_0 = ma^2\omega^2/2$  — начальное значение энергии.

Для характеристики осциллирующей системы часто применяется величина  $Q$ , называемая **добротностью**. Она представляет собой умноженное на  $2\pi$  отношение запасенной в системе энергии к величине энергии, теряемой за один период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\left| T \frac{dE}{dt} \right|}. \quad (14.33)$$

Для слабо затухающего гармонического осциллятора  $\omega \approx \omega_0$  и

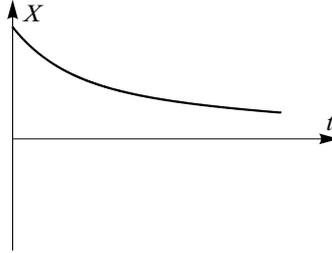
$$Q = 2\pi \frac{E}{2\lambda ET} = \frac{\pi}{\lambda T} = \frac{\omega_0}{2\lambda} \gg 1. \quad (14.34)$$

Безразмерная величина  $\lambda T \ll 1$  называется **логарифмическим декрементом затухания**.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\lambda > \omega_0$ . В этом случае оба значения  $r$  вещественны и отрицательны. Общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}. \quad (14.35)$$

Мы видим, что в этом случае, когда трение велико, величина  $|x|$  монотонно убывает до нуля, не испытывая никаких колебаний<sup>2</sup>. Такой характер движения называют **апериодическим затуханием** (рис. 14.3).



**Рис. 14.3.** Апериодически затухающее движение,  $\lambda > \omega_0$ .

Особого рассмотрения требует случай  $\lambda = \omega_0$ . В этом случае характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень  $r = -\lambda$  и, как показывается в математике, в этом случае общее решение дифференциального уравнения принимает вид

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t} \quad (14.36)$$

(проверьте это подстановкой). Это есть особый случай апериодического затухания. Движение в этом случае тоже не имеет колебательного характера.

## Вынужденные колебания при наличии трения

Рассмотрим теперь вынужденные колебания при наличии трения в случае периодической вынуждающей силы  $f \cos \gamma t$ , где  $f$  — амплитуда вынуждающей силы, а  $\gamma$  — ее частота. Уравнение движения имеет в этом случае вид

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \quad (14.37)$$

Решение этого уравнения будем искать в комплексной форме. Для этого в правой части вместо  $\cos \gamma t$  запишем  $e^{i\gamma t}$ :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}. \quad (14.38)$$

Отсюда видно, что  $\text{Re } x$  удовлетворяет уравнению (14.37). Поэтому, решив уравнение (14.38) и взяв от решения вещественную часть, мы найдем тем самым решение уравнения (14.37).

Частный интеграл уравнения (14.38) будем искать в виде  $x = B e^{i\gamma t}$ . Подставляя это решение в (14.38), получаем

$$(i\gamma)^2 B e^{i\gamma t} + 2\lambda(i\gamma) B e^{i\gamma t} + \omega_0^2 B e^{i\gamma t} = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}, \quad (14.39)$$

и сокращая на  $e^{i\gamma t}$ , получаем для комплексной амплитуды  $B$

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \quad (14.40)$$

Представив  $B$  в виде

$$B = b e^{i\delta}, \quad (14.41)$$

<sup>2</sup>При  $x(0) > 0$  и  $\dot{x}(0) > 0$  на кривой  $x(t)$  имеется один максимум.

где  $b$  и  $\delta$  — вещественные модуль и фаза комплексного числа  $B$ , получаем

$$b = |B| = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}. \quad (14.42)$$

Выражение для фазы можно получить, записав  $B$  в виде

$$B = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} = be^{i\delta} = b \cos \delta + ib \sin \delta. \quad (14.43)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{Im} B}{\operatorname{Re} B} = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (14.44)$$

Отделяя вещественную часть решения, получим

$$\operatorname{Re} \{be^{i\delta} e^{i\gamma t}\} = \operatorname{Re} \{be^{i(\gamma t + \delta)}\} = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (14.45)$$

По математической теореме, которую мы упоминали в начале лекции, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения (с правой частью равной нулю!) и частного решения неоднородного уравнения. Поэтому имеем, например, в случае  $\omega_0 > \lambda$  для общего решения уравнения (14.37)

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (14.46)$$

Первое слагаемое в этом выражении экспоненциально убывает со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени (в пределе  $t \rightarrow \infty$ ) остается только второй член

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (14.47)$$

Как следует из полученного нами выражения для амплитуды вынужденного колебания (14.42), она возрастает при приближении частоты вынуждающей силы  $\gamma$  к собственной частоте колебаний  $\omega_0$ . Однако из-за наличия трения она не обращается в бесконечность, как это было в случае резонанса при отсутствии трения. При заданной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний достигает своего максимального значения при частоте

$$\gamma_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}. \quad (14.48)$$

При  $\lambda \ll \omega_0$

$$\gamma_m = \omega_0 - \frac{\lambda^2}{\omega_0}, \quad (14.49)$$

то есть  $\gamma_m$  отличается от  $\omega_0$  лишь на величину второго порядка малости.

Рассмотрим теперь область частот вблизи резонанса в случае слабого трения, то есть при  $\lambda \ll \omega_0$ . Положим  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина. Тогда в выражении (14.40) для комплексной амплитуды  $B$  можно приближенно заменить

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = (\omega_0 - \gamma)(\omega_0 + \gamma) \approx -\varepsilon \cdot 2\omega_0 = -2\omega_0\varepsilon, \quad 2\lambda\gamma \approx 2\lambda\omega_0. \quad (14.50)$$

В результате получим

$$B = -\frac{f}{2m\omega_0(\varepsilon - i\lambda)} = -\frac{f(\varepsilon + i\lambda)}{2m\omega_0(\varepsilon^2 + \lambda^2)}. \quad (14.51)$$

Отсюда

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (14.52)$$

Из выражения (14.51) следует, что  $\operatorname{Im} B < 0$ , то есть разность фаз  $\delta$  между колебанием и вынуждающей силой всегда отрицательна. Это и понятно. При наличии трения колебание всегда “запаздывает” относительно вынуждающей силы. Вдали от резонанса при  $\gamma < \omega_0$  ( $\varepsilon < 0$ ) величина  $\delta \rightarrow -0$ . А в области больших частот,  $\gamma > \omega_0$  ( $\varepsilon > 0$ ), фаза стремится к значению, равному  $-\pi$ . В резонансе, когда  $\gamma = \omega_0$ , фаза  $\delta = \pi/2$ . Изменение фазы от  $-0$  до  $-\pi$  происходит в узкой полосе вблизи резонанса шириной порядка  $\lambda$ . Отметим здесь, что в отсутствие трения изменение фазы вынужденных колеба-

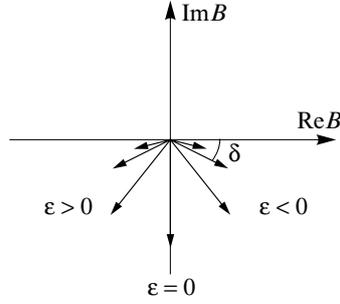


Рис. 14.4. Плоскость комплексной переменной  $B$ .

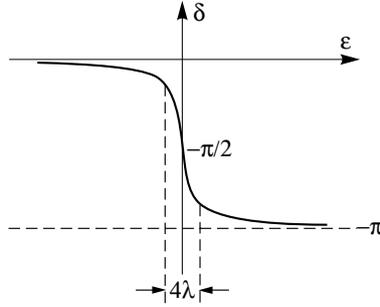


Рис. 14.5. Зависимость разности фаз от частоты.

ний на величину  $\pi$  происходит скачком при  $\gamma = \omega_0$  (второй член в выражении (14.8) при этом меняет знак). Учет трения размывает этот скачок.

При установившемся движении, когда система совершает вынужденные колебания по закону (14.47), ее энергия, очевидно, остается неизменной. Однако при этом внешняя сила непрерывно совершает работу над системой. Иными словами, система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, которая в конечном счете диссипируется в тепло благодаря наличию трения.

Пусть  $I(\gamma)$  обозначает количество энергии, поглощаемой системой в среднем в единицу времени, как функцию частоты вынуждающей силы. Эта величина, как известно, равна работе внешней силы за единицу времени, то есть мощности (усредненной затем по времени):

$$dA = f(t)dx, \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt} = f(t) \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (14.53)$$

Отсюда, согласно уравнению движения,

$$\dot{A} = f(t)\dot{x} = (m\ddot{x} + 2\lambda m\dot{x} + m\omega_0^2 x)\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} + 2\lambda m\dot{x}^2 + m\omega_0^2 x\dot{x}. \quad (14.54)$$

При усреднении по времени первое и третье слагаемые в этом выражении, будучи произведениями синуса на косинус, очевидно, дают нуль. В результате остается лишь вклад от второго слагаемого

$$\bar{\dot{A}} = 2\lambda m \bar{\dot{x}^2}. \quad (14.55)$$

Подставляя сюда  $\dot{x} = -b\gamma \sin(\gamma t + \delta)$  и производя усреднение по времени, получаем

$$I(\gamma) = \bar{\dot{A}} = \lambda m b^2 \gamma^2. \quad (14.56)$$

Вблизи резонанса  $\gamma \approx \omega_0$  амплитуда  $b$  определяется формулой (14.52). В итоге получаем

$$I(\varepsilon) = \lambda m \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2(\varepsilon^2 + \lambda^2)} \omega_0^2 = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \quad (14.57)$$

Такой вид зависимости поглощения от частотной расстройки относительно резонанса (то есть разности  $\gamma - \omega_0$ ) называют **дисперсионным**. Полушириной резонансной кривой (см. рис. 14.6)  $\Delta\varepsilon$  называется значение  $|\varepsilon|$ , при котором величина  $I(\varepsilon)$  уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при  $\varepsilon = 0$ . Из формулы (14.57) следует, что в рассматриваемом случае  $\Delta\varepsilon = \lambda$ . С другой стороны, высота максимума

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda} \quad (14.58)$$

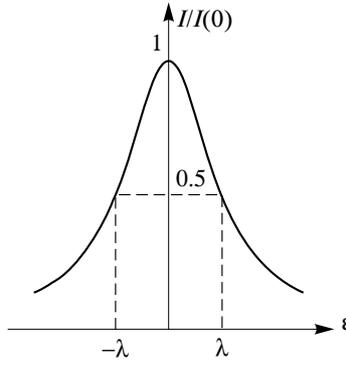


Рис. 14.6. Резонансная кривая поглощения.

обратно пропорциональна  $\lambda$ . Поэтому при уменьшении трения  $\lambda$  резонансная кривая становится уже и выше, то есть ее максимум становится более острым. Однако площадь под резонансной кривой остается при этом неизменной. Действительно, эта площадь определяется интегралом

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (14.59)$$

Функция  $I(\varepsilon)$  имеет максимум при  $\varepsilon = 0$  и быстро убывает при увеличении  $|\varepsilon|$ . По этой причине область больших  $|\varepsilon|$  вносит лишь незначительный вклад в интеграл. Поэтому при интегрировании для  $I(\varepsilon)$  можно использовать выражение (14.57), а нижний предел заменить на  $-\infty$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\lambda f^2}{4m} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2}}_{\pi\lambda} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (14.60)$$

## Суперпозиция колебаний

Линейность уравнений движения, описывающих вынужденные гармонические колебания (с трением и без него), приводит к тому, что оказывается справедливым так называемый **принцип суперпозиции колебаний**.

Пусть, например, на систему, совершающую колебательное движение, действует внешняя сила, зависящая от времени и представляющая собой суперпозицию двух сил

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t). \quad (14.61)$$

Это могут быть, например, периодические по времени функции с различными частотами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Уравнение движения тогда запишется в виде

$$m\ddot{x} + \alpha_p \dot{x} + kx = f_1(t) + f_2(t). \quad (14.62)$$

Согласно принципу суперпозиции,

решение этого уравнения есть сумма решений того же уравнения под воздействием каждой из сил в отдельности,

то есть

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (14.63)$$

где функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$m\ddot{x}_j + \alpha_p \dot{x}_j + kx_j = f_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (14.64)$$

Проверяется это утверждение непосредственной подстановкой. Для этого первое из уравнений (14.64) складывают со вторым. В силу линейности всех операций в левой части уравнения (14.64), мы и приходим к сформулированному выше принципу суперпозиции колебаний. Заметим, что равенство (14.3) является, очевидно, следствием этого принципа.

## Параметрический резонанс

Действие на колебательную систему периодической внешней силы — не единственный путь, чтобы возбудить в ней колебания. Существуют незамкнутые системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем их параметров. Простейший пример такого рода — это математический маятник, длина которого  $l$  периодически изменяется за счет вытягивания и опускания нити, на конце которой привязан грузик (рис. 15.1).

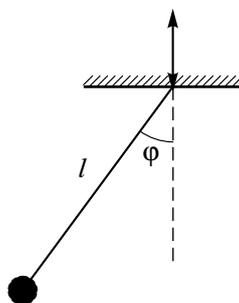


Рис. 15.1. Маятник с переменной длиной.

Другим широко известным примером являются качели, где человек, приседая и выпрямляясь, периодически изменяет момент инерции системы (рис. 15.2)<sup>1</sup>. В обоих случаях при определенных

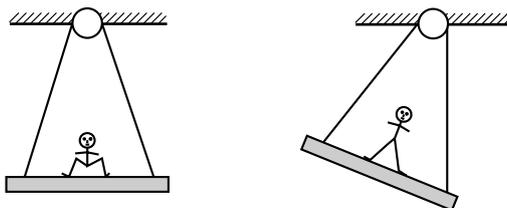


Рис. 15.2. Качели.

условиях в системе возникают колебания. Это явление получило название **параметрического резонанса**.

Рассмотрим условия возникновения параметрического резонанса на примере простейшей колебательной системы — грузика с массой  $m$  на пружине — в ситуации, когда периодически меняется жесткость пружины  $k$ . Несмотря на то, что придумать, как это можно осуществить на практике, непросто, можно показать математически, что к задаче такого рода сводятся все задачи о параметрическом резонансе в системах с одной степенью свободы (в том числе и перечисленные выше). Уравнение движения запишем в виде

$$m\ddot{x} + k(t)x = 0. \quad (15.1)$$

Пусть жесткость пружины меняется по простому гармоническому закону  $k(t) = k_0(1 + h \cos \gamma t)$ . Тогда, разделив на массу, уравнение движения можно переписать так:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0, \quad (15.2)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$  — невозмущенная частота собственных колебаний системы. Величину возмущения  $h$  мы будем считать малой,  $h \ll 1$ .

Будем решать это уравнение по теории возмущений по малому параметру  $h$ . В нулевом приближении, то есть при  $h = 0$ , решением уравнения (15.2) является, как известно, функция  $a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ . Поэтому при малом, отличном от нуля  $h$  можно полагать, что решение будет слабо отличаться от невозмущенного решения. Поэтому будем искать его в виде

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) + x_1, \quad (15.3)$$

<sup>1</sup>И разумеется, положение центра тяжести.

где  $x_1$  — мало и предполагается, что оно пропорционально малому параметру  $h$ .

Подставляя это  $x$  в уравнение (15.2), получаем уравнение для малой добавки  $x_1$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -h\omega_0^2 a_0 \cos \gamma t \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (15.4)$$

где мы пренебрегли членом, пропорциональным произведению  $hx_1$ , поскольку он второго порядка малости, то есть  $\propto h^2$ . Легко видеть, что это уравнение описывает вынужденные колебания осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$  под действием вынуждающей силы  $f$ , зависящей от времени. Эту силу (на единицу массы) можно представить в виде суммы двух гармонических составляющих:

$$\begin{aligned} f &= -ha_0\omega_0^2 \cos \gamma t \cos(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2}ha_0\omega_0^2 \{ \cos [(\gamma + \omega_0)t + \alpha] + \cos [(\gamma - \omega_0)t - \alpha] \} \end{aligned} \quad (15.5)$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, решение уравнения (15.4) есть сумма решений под действием каждой из этих составляющих в отдельности. Пользуясь результатами, изложенными в предыдущей лекции, не составляет труда выписать их в явном виде.

Интересная ситуация, однако, возникает, если один из косинусов в выражении для силы имеет частоту, равную собственной частоте колебаний системы  $\omega_0$ . Посмотрим, при каких значениях частоты  $\gamma$  это может произойти. В первом косинусе это произойдет, если

$$\gamma + \omega_0 = \omega_0, \quad \text{или} \quad \gamma = 0. \quad (15.6)$$

Но этот случай не представляет для нас интереса, так как  $\gamma = 0$ , означает, что параметры системы со временем не меняются. Во втором случае условие

$$\gamma - \omega_0 = \omega_0, \quad \text{или} \quad \gamma = 2\omega_0 \quad (15.7)$$

означает, что если частота  $\gamma = 2\omega_0$ , то в системе возникает резонанс и решение  $x_1$  неограниченно растет со временем<sup>2</sup>. Иными словами, в системе происходит возбуждение колебаний, то есть имеет место параметрический резонанс. Таким образом, условие  $\gamma = 2\omega_0$  является условием возникновения в системе параметрического резонанса.

Более точный анализ показывает, что раскачка колебаний имеет место в целом диапазоне частот  $\Delta\gamma$  вокруг частоты  $2\omega_0$ . Так, если мы введем обозначение

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon, \quad (15.8)$$

где  $\varepsilon$  — малая расстройка, то можно показать, что в отсутствие трения параметрический резонанс возникает в диапазоне частот

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2}. \quad (15.9)$$

В том случае, когда в системе присутствует затухание, уравнение для  $x$  выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0. \quad (15.10)$$

Тогда можно показать (см. приложение), что условие параметрического резонанса принимает вид

$$|\varepsilon| < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (15.11)$$

При  $\lambda = 0$  это условие переходит в (15.9). Из этого соотношения следует, что при наличии трения резонанс оказывается возможным не при сколь угодно малой амплитуде  $h$ , а лишь начиная с определенного порога

$$h_c = \frac{4\lambda}{\omega_0}. \quad (15.12)$$

Можно показать, что параметрический резонанс имеет место также при частотах  $\gamma$ , близких к значениям вида  $2\omega_0/n$ , где  $n$  — любое целое число. Однако ширина резонансных областей (областей неустойчивости) в отсутствие затухания с увеличением  $n$  быстро уменьшается, как  $h^n$ .

<sup>2</sup>В результате  $x_1$  становится вовсе не малым, как мы предполагали вначале. Однако нас в настоящий момент интересует не амплитуда возникших колебаний, а лишь условия их появления.

## Приложение

Найдем условия возникновения параметрического резонанса в системе, описываемой уравнением вида

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0. \quad (15.13)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$x = ae^{(s+i\gamma/2)t} + a^*e^{(s-i\gamma/2)t}, \quad (15.14)$$

где  $s$  — некоторое вещественное число, а  $a$  — комплексная амплитуда. Если  $s > 0$ , то мы имеем экспоненциально растущее во времени решение, что и означает параметрическую раскачку колебаний. Подставим теперь это  $x$  в уравнение. Имея в виду, что основной резонанс возникает на частоте  $\gamma/2$ , в произведении  $x \cos \gamma t$  удержим только гармоники с частотой  $\gamma/2$ :<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} x \cos \gamma t &= \left[ ae^{(s+i\gamma/2)t} + a^*e^{(s-i\gamma/2)t} \right] (e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}) / 2 = \\ &= \frac{a}{2} e^{(s-i\gamma/2)t} + \frac{a^*}{2} e^{(s+i\gamma/2)t} + \text{остальные гарм.} \end{aligned} \quad (15.15)$$

Приравнявая теперь в уравнении (15.13) коэффициенты при экспонентах  $e^{i\gamma t/2}$  и  $e^{-i\gamma t/2}$  по отдельности, получаем для комплексной амплитуды  $a$  следующую линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ \left( s + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left( s + i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \right] a + \frac{h\omega_0^2}{2} a^* &= 0 \\ \frac{h\omega_0^2}{2} a + \left[ \left( s - i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left( s - i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \right] a^* &= 0, \end{aligned} \quad (15.16)$$

Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \left( s + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left( s + i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 & \frac{h\omega_0^2}{2} \\ \frac{h\omega_0^2}{2} & \left( s - i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left( s - i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\left| \left( s + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left( s + i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \right|^2 = \left( \frac{h\omega_0^2}{2} \right)^2. \quad (15.17)$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\left( s^2 + \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + 2\lambda s \right)^2 + \gamma^2(s + \lambda)^2 = \left( \frac{h\omega_0^2}{2} \right)^2. \quad (15.18)$$

Отсюда границы резонанса можно определить, положив  $s = 0$  (внутри этих границ  $s$  положительно). Имеем

$$\left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^2 = \left( \frac{h\omega_0^2}{2} \right)^2 - \gamma^2\lambda^2. \quad (15.19)$$

Подставляя сюда  $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  мало, получаем окончательно

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left( \frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - 4\lambda^2}, \quad (15.20)$$

что и требовалось доказать.

<sup>3</sup>Остальные гармоники имеют более высокий порядок малости по параметру  $h \ll 1$ .

## Нелинейные колебания. Фазовый портрет ангармонического осциллятора. Отображение Пуанкаре. Понятие о фракталах. Предсказуемость хаотического движения

Если амплитуда колебаний не мала, то в разложении потенциальной энергии  $U(q)$  в ряд Тейлора по отклонению от положения равновесия  $x = q - q_0$  необходимо учитывать степени  $x$  выше второй. Физическая причина наличия таких членов может, например, заключаться в зависимости параметров системы от величины отклонения от положения равновесия. Например, для грузика на пружине жесткость пружины  $k$  может увеличиваться при больших сжатиях (растяжениях). В результате  $k$

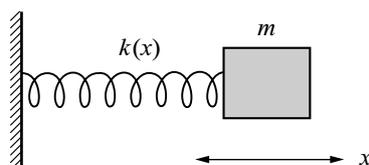


Рис. 16.1. Простейшая модель ангармонического осциллятора.

зависит от смещения  $x$ :

$$k = k(x) = k_0(1 + \alpha x^2), \quad (16.1)$$

где  $\alpha > 0$  — коэффициент, характеризующий степень увеличения жесткости пружины при деформации. Возвращающая сила становится при этом **нелинейной** функцией смещения:

$$F = -k_0 x (1 + \alpha x^2). \quad (16.2)$$

Такая зависимость силы от смещения соответствует потенциальной энергии

$$U(x) = \frac{k_0}{2} x^2 + \frac{k_0 \alpha}{4} x^4. \quad (16.3)$$

Данная система является **нелинейным**, или **ангармоническим** осциллятором. При отклонении тела (вправо, влево) от положения равновесия оно начинает совершать свободные **ангармонические** (несинусоидальные) колебания. Главное отличие таких колебаний от гармонических заключается в том, что их период зависит от полной энергии системы  $E$ .

Другим примером ангармонических колебаний являются колебания обычного математического маятника. Его потенциальная энергия как функция угла отклонения от положения равновесия  $\varphi$  равна

$$U = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (16.4)$$

Если  $\varphi$  не мало, то колебания являются ангармоническими. Ниже, на рис. 16.2, изображена зависимость потенциальной энергии от угла  $\varphi$ . Как мы знаем, в зависимости от полной энергии движение

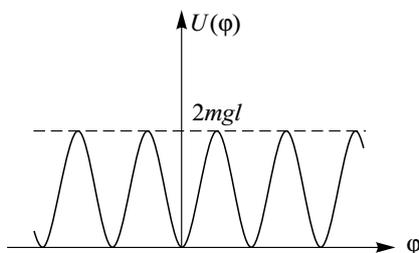


Рис. 16.2. Потенциальная энергия математического маятника  $U(\varphi)$ .

может быть финитным и инфинитным. Так, из представленного рисунка следует, что если полная энергия системы  $E < 2mgl$ , то угол  $\varphi$  при колебаниях изменяется в интервале  $|\Delta\varphi| < 2\pi$ . Если же

полная энергия  $E > 2mgl$ , то маятник прокручивается, совершая один за другим полные обороты на угол, равный  $2\pi$ .

Фазовый портрет такого маятника изображен ниже на рис. 16.3 и представляет собой семейство

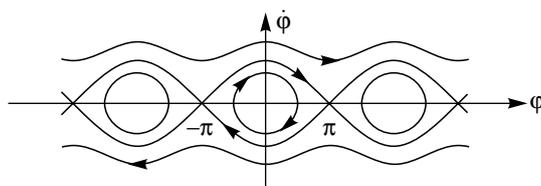


Рис. 16.3. Фазовый портрет математического маятника.

линий, описываемых уравнением

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const} \quad (16.5)$$

при разных значениях константы.

Финитному движению соответствуют замкнутые траектории, а инфинитному — открытые. Линия, разделяющая финитное и инфинитное движение и соответствующая энергии  $E = 2mgl$ , называется **сепаратрисой**. При  $E \gg 2mgl$  движение оказывается очень близким к равномерному вращению с угловой скоростью  $\omega = \sqrt{2E/ml^2}$ . При  $E \ll 2mgl$  это гармонические колебания с угловой частотой  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

Как мы уже упоминали, уравнение движения, описывающее свободные колебания одномерного ангармонического осциллятора, может быть проинтегрировано в общем виде, или, как говорят, сведено к квадратурам. Значительно более сложная ситуация возникает, однако, если на ангармонический осциллятор воздействует периодическая по времени внешняя сила. В этом случае проинтегрировать уравнения движения в общем виде не удастся и возможно только их численное решение. Такие исследования (компьютерные эксперименты) были проведены совсем недавно, в 1978-1979 (!) годах. Как это ни удивительно, они привели к довольно неожиданным результатам. Парадоксально, но факт, в науке, возраст которой оценивается примерно в 300 лет, совсем недавно, благодаря использованию компьютеров, оказалось возможным сделать новые фундаментальные открытия!

Проанализируем качественно основные результаты этих исследований на примере так называемого **уравнения Дуффинга**. Оно описывает колебания нелинейного осциллятора с трением под действием гармонической внешней силы:

$$m\ddot{x} + \alpha_p\dot{x} + k_0x(1 + \alpha x^2) = f \cos \gamma t. \quad (16.6)$$

При малой амплитуде вынуждающей силы  $f$  нелинейностью колебаний (членом  $\alpha x^2$ ) можно пренебречь. Тогда, как мы знаем, вынужденные колебания происходят по гармоническому закону  $x = b \cos(\gamma t + \delta)$  с частотой вынуждающей силы. В фазовом пространстве  $(x, \dot{x})$  траектория представляет собой эллипс.

При увеличении амплитуды силы  $f$  форма колебаний начинает отличаться от простого гармонического закона  $b \cos(\gamma t + \delta)$ , колебания становятся более сложными, в них появляются все в большей степени дополнительные слагаемые на кратных частотах  $2\gamma, 3\gamma, \dots$ , так называемые **обертоны** (высшие гармоники) основного колебания. В фазовом пространстве траектория теперь отличается от простого эллипса, однако по-прежнему представляет собой замкнутую кривую, по которой движется изображающая точка с периодом, равным периоду  $T = 2\pi/\gamma$  вынуждающей силы (рис. 16.4). Отметим еще одну важную характерную особенность: принцип суперпозиции уже не выполняется, как в случае линейного осциллятора.

Помимо наличия высших гармоник и нарушения принципа суперпозиции, появляется еще одна характерная черта, свойственная нелинейным системам, — **множественность решений**. При заданных параметрах системы у уравнения (16.6) в общем случае может быть не одно, а два и более решений. Они соответствуют разным начальным условиям. В этой связи отметим, что в линейной системе с трением в пределе  $t \rightarrow \infty$  решение всего одно и не зависит от выбора начальных условий. Ниже, на рис. 16.5, показаны две фазовые траектории одного и того же уравнения, соответствующие двум разным начальным точкам на фазовой плоскости. Из рисунка видно, что колебания, соответствующие правому решению, происходят с большей амплитудой.

Численные расчеты показывают, что при дальнейшем увеличении амплитуды  $f$  вынуждающей силы проявляется еще одна особенность. При некотором значении  $f = f_1$  происходит так называемое

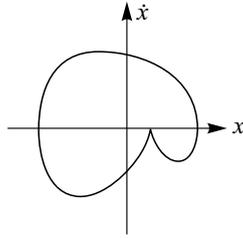


Рис. 16.4. Фазовая траектория осциллятора Дуффинга:  $\ddot{x} + 0.05\dot{x} + x + x^2 = 0.9 \cos 0.7t$ .

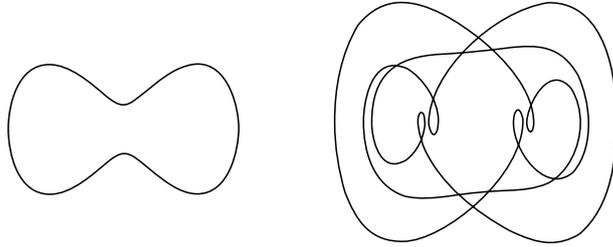


Рис. 16.5. Два решения уравнения  $\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^3 = 1.9 \cos(0.7t)$ , соответствующие двум разным начальным точкам на фазовой плоскости. Левая траектория соответствует основному периоду  $T = 2\pi/\gamma$ , в то время как правая отвечает утроенному периоду  $3T$ .

**удвоение периода** колебаний,  $T \rightarrow 2T$ . Это означает, что среди частот на которых происходит колебание, появляется частота  $\gamma/2$ . Траектория в фазовом пространстве качественно меняется — ее длина удваивается (рис. 16.6).

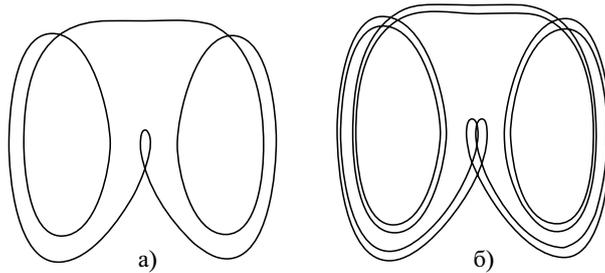


Рис. 16.6. Удвоение периода в уравнении Дуффинга:  $\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^3 = f \cos(0.7t)$ : а)  $f = 9.2$ , б)  $f = 9.28$ ,  $f_1 = 9.24$ .

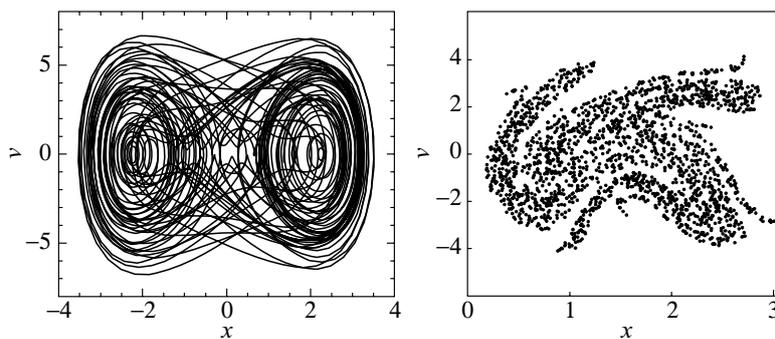
Причиной возникновения колебаний с удвоенным периодом является параметрический резонанс. Согласно формуле (16.1), при колебаниях происходит периодическое изменение жесткости пружины  $k$ . Период колебаний жесткости при большой амплитуде  $f$  совпадает с периодом  $T = 2\pi/\gamma$  основных колебаний осциллятора. Все дальнейшее вполне аналогично тому, что происходит при раскачке качелей, когда стоящий на качелях человек периодически (с периодом  $T$ ) приседает и выпрямляется, — происходит так называемое параметрическое возбуждение колебаний, то есть возбуждение, обусловленное периодическим изменением параметров осциллятора. Период таких колебаний ровно в два раза больше периода раскачки, то есть  $T_1 = 2T$ . Причем при наличии в системе трения возбуждение колебаний происходит при некоторой конечной амплитуде раскачки.

Таким образом, удвоение периода ангармонических колебаний связано с параметрическим возбуждением осциллятора вследствие зависимости  $k(x)$ . Следуя этой идее, нетрудно предположить, что возникшие колебания с удвоенным периодом, модулируя жесткость, приведут при некотором значении амплитуды  $f_2$  к возникновению новых колебаний с периодом  $2 \cdot 2T = 4T$ . Таким образом, при увеличении амплитуды вынуждающей силы происходит целая **цепочка удвоений периода**:  $2T, 4T, \dots$ , а также возникают всевозможные обертоны этих колебаний.

Важным открытием 70-х годов явилось то, что рост числа **субгармоник** с ростом амплитуды  $f$  происходит чрезвычайно быстро. Последовательность **бифуркаций**  $f_1, f_2, \dots, f_n$  имеет, как выяснилось, конечный предел  $f_\infty$ . Другими словами, спектр частот вынужденных колебаний при  $f > f_\infty$  из дискретного становится сплошным. Зависимость координаты  $x(t)$  от времени в условиях, когда в спектре присутствуют все частоты, становится очень нерегулярной, **хаотической**.

Траектория изображающей точки перестает быть замкнутой и приобретает очень сложный, запу-

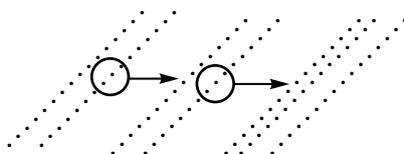
танный характер, плотно заполняя целые области на фазовой плоскости (рис. 16.7). Такая картина



**Рис. 16.7.** Хаотическая фазовая траектория при  $f > f_\infty$  и ее сечение Пуанкаре в уравнении Дуффинга  $\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^3 = 14 \cos(0.7t)$ .

уже не является наглядной, и для выяснения внутренних закономерностей возникшего хаотического движения используется следующий прием. На фазовой плоскости отмечают точки, отвечающие не всем значениям  $t$ , а только тем, которые, например, соответствуют фазе вынуждающей силы  $\gamma t_n = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Получающаяся при этом система точек на плоскости  $(x, \dot{x})$  называется **сечением** (или **отображением**) **Пуанкаре**. Оно включает в себе важную информацию о поведении функции  $x(t)$ <sup>1</sup>.

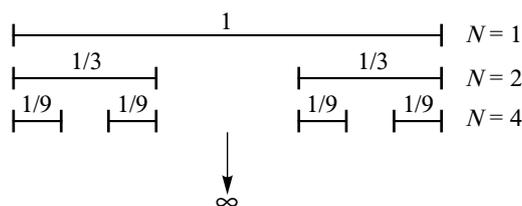
Оказывается, что точки, представляющие собой сечение Пуанкаре, образуют бесконечные, строго упорядоченные множества точек, концентрирующихся вдоль некоторых линий (рис. 16.7). Они как бы вложены одно в другое. Например, если увеличить малую часть отображения Пуанкаре, то можно обнаружить более тонкую структуру и так до бесконечности. Схематически это показано на рис. 16.8. По математической терминологии, такая структура называется **канторовым множеством**



**Рис. 16.8.** Фрактальная структура сечения Пуанкаре.

или **фракталом**.

Чтобы лучше понять, что такое канторово множество приведем один пример. Возьмем отрезок длины 1 и, разделив его на три равные части, исключим среднюю часть. С оставшимися двумя отрезками сделаем ту же процедуру и так до бесконечности (рис. 16.9). Суммарная длина получившихся



**Рис. 16.9.** Пример канторова множества.

в пределе отрезков равна нулю, так как мы исключили в результате вышеописанной процедуры длину, равную 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \quad (16.7)$$

Следовательно, возникшее множество представляет собой бесконечное число изолированных точек. Это и есть пример канторова множества.

Отметим два наиболее важных свойства канторовых множеств.

<sup>1</sup>Для периодического движения сечение Пуанкаре состоит всего из одной точки, для движения с удвоенным периодом — из двух, и т.д.

- Любая малая часть канторова множества подобна самому множеству: увеличив масштаб в некоторое число раз, мы получим канторово множество с теми же свойствами. Это свойство называют **масштабной инвариантностью** (или **самоподобием**).
- Канторово множество является **фракталом** и имеет **дробную** пространственную размерность.

В рассмотренном только что примере множества опущенных средних третей размерность  $d_f$  заключена между нулем (набор отдельных точек) и единицей (отрезок прямой или кривой):

$$0 < d_f < 1. \quad (16.8)$$

Возникает интересный вопрос. А как определить эту пространственную размерность? Поступим для этого следующим образом. Выберем некоторый малый пространственный масштаб  $\varepsilon$  и найдем минимальное число  $N(\varepsilon)$  отрезков длины  $\varepsilon$ , которое покрывает все множество. Тогда, по определению, размерность канторова множества, или, как еще говорят, **фрактальная размерность**, равна

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (16.9)$$

Действительно, если эту формулу применить к отрезку длины  $L$ , то  $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$  и

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(L/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = 1. \quad (16.10)$$

Для множества  $N$  изолированных точек  $N(\varepsilon) = N$ , и поэтому

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/\varepsilon)} = 0. \quad (16.11)$$

В нашем примере для определения фрактальной размерности выберем  $\varepsilon = 1/3^n$  (с  $n \rightarrow \infty$  впоследствии). Тогда, как следует из рис. 16.9,  $N(\varepsilon) = 2^n$ , поэтому

$$d_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309. \quad (16.12)$$

Разумеется, для размерности канторова множества, возникающего при хаотических колебаниях, не существует такой простой формулы. Однако ее легко определить численно с помощью описанной выше процедуры. Оказывается, что если речь идет о фазовой траектории, то её фрактальная размерность всегда заключена между 1 и 2:

$$1 < d_f < 2 \quad (16.13)$$

Это означает, что геометрическая структура жгута траекторий на фазовой плоскости такова, что она занимает промежуточное положение между одномерными (то есть линейными) и двумерными (плоскими) объектами. Другими словами, жгут траекторий оказывается слишком пористым, чтобы можно было характеризовать его площадью, и слишком плотным и запутанным, чтобы его можно было характеризовать длиной. По причинам, которые будут приведены ниже, такой жгут имеет специальное название **странного аттрактора**. Размерность странного аттрактора увеличивается при увеличении амплитуды внешней силы и уменьшается с ростом трения в колебательной системе, которое подавляет хаотичность движения.

## Предсказуемость хаотического движения

Черезвычайно сложная и запутанная фазовая траектория частицы приводит к тому, что предсказать ее поведение на достаточно больших интервалах времени становится практически невозможным. Теоретически знание параметров осциллятора и начальных условий (координаты и скорости) **однозначно** определяет функцию  $x(t)$ . То есть, как говорят, процесс является **детерминированным**. С другой стороны, небольшая неточность, например в начальных условиях, быстро накапливается, так что по прошествии некоторого времени неопределенность в положении частицы будет порядка размеров области движения. Такая сверхчувствительность к начальным условиям напоминает эксперимент с падением шарика на острие бритвы (рис. 16.10). В зависимости от своего начального положения шарик, ударившись об острие, отскакивает либо вправо, либо влево. Другими словами, это означает, что движение является **неустойчивым**.

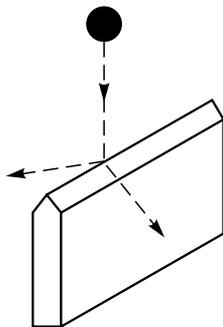


Рис. 16.10. Падение шарика на острие бритвы.

Одной из самых неустойчивых динамических систем является **двумерный газ Лоренца**. Эта модель была предложена Г. А. Лоренцем в начале нашего века для описания электропроводности металлов. Она состоит из кружков одинакового радиуса — рассеивателей, случайным образом разбросанных по плоскости, и материальной точки (частицы), которая движется с постоянной скоростью между ними, испытывая каждый раз зеркальное отражение при столкновении. В неустойчивости такой системы можно убедиться, рассмотрев две близкие траектории частицы, выходящие из одной точки. Из рис. 16.11 видно, что уже после двух актов рассеяния угол между траекториями, первоначально меньший  $1^\circ$ , становится большим  $\pi/2$ . Таким образом, первоначально близкие траектории очень быстро расходятся.

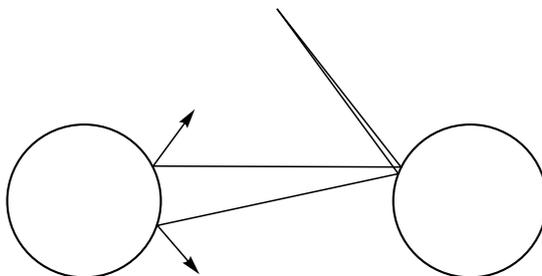


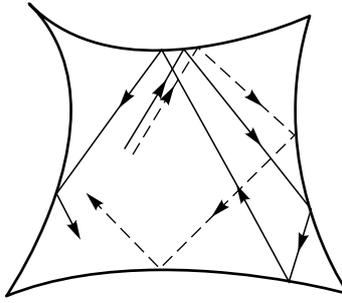
Рис. 16.11. “Потеря памяти” и расходимость близких траекторий в результате неустойчивости движения в двумерном газе Лоренца.

Поскольку довольно трудно вообразить себе движение, происходящее в ограниченной области пространства и всюду неустойчивое, оно и было названо **странным**. Частица, двигаясь подобным образом, быстро “забывает” свое прошлое, и предсказать, где она будет спустя некоторое время, становится практически невозможным.

В такой ситуации единственно разумным представляется лишь постановка вопроса о вычислении **вероятности** нахождения точки в том или ином месте фазового пространства. В результате мы приходим к выводу о необходимости **статистического подхода** к описанию вполне детерминированного процесса. Такая необходимость не является результатом нашего незнания движения или несовершенства вычислительного аппарата, а отражает глубокие внутренние свойства самого движения.

Похожая картина возникает при изучении движения частицы в **рассеивающем бильярде**<sup>2</sup>. В случае выпуклой стенки малое начальное расстояние между двумя близкими траекториями при отскоке возрастает. Это возрастание происходит при каждом столкновении со стенкой, поэтому две траектории, поначалу очень близкие, буквально через несколько отскоков станут далекими. Таким образом, и здесь малая неточность в начальных данных быстро накапливается. Поэтому через некоторое время движение частицы в бильярде становится практически **непредсказуемым**.

<sup>2</sup>Так называется бильярд с выпуклыми стенками.



**Рис. 16.12.** “Непредсказуемое” движение частицы в рассеивающем бильярде.

## Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
- [2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 том). М., Мир, 1976 — 440 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
- [5] Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

# Оглавление

## **Лекция 13.**

Гармонические колебания.

Колебания математического маятника.

Колебания физического маятника.

Фазовый портрет маятника.

Адиабатические инварианты

2

## **Лекция 14.**

Вынужденные колебания.

Биения.

Затухающие колебания.

Добротность.

Вынужденные колебания при наличии трения.

Принцип суперпозиции колебаний

10

## **Лекция 15.** Параметрический резонанс

18

## **Лекция 16.** Нелинейные колебания.

Фазовый портрет ангармонического осциллятора.

Отображение Пуанкаре.

Понятие о фракталах.

Предсказуемость хаотического движения

21